

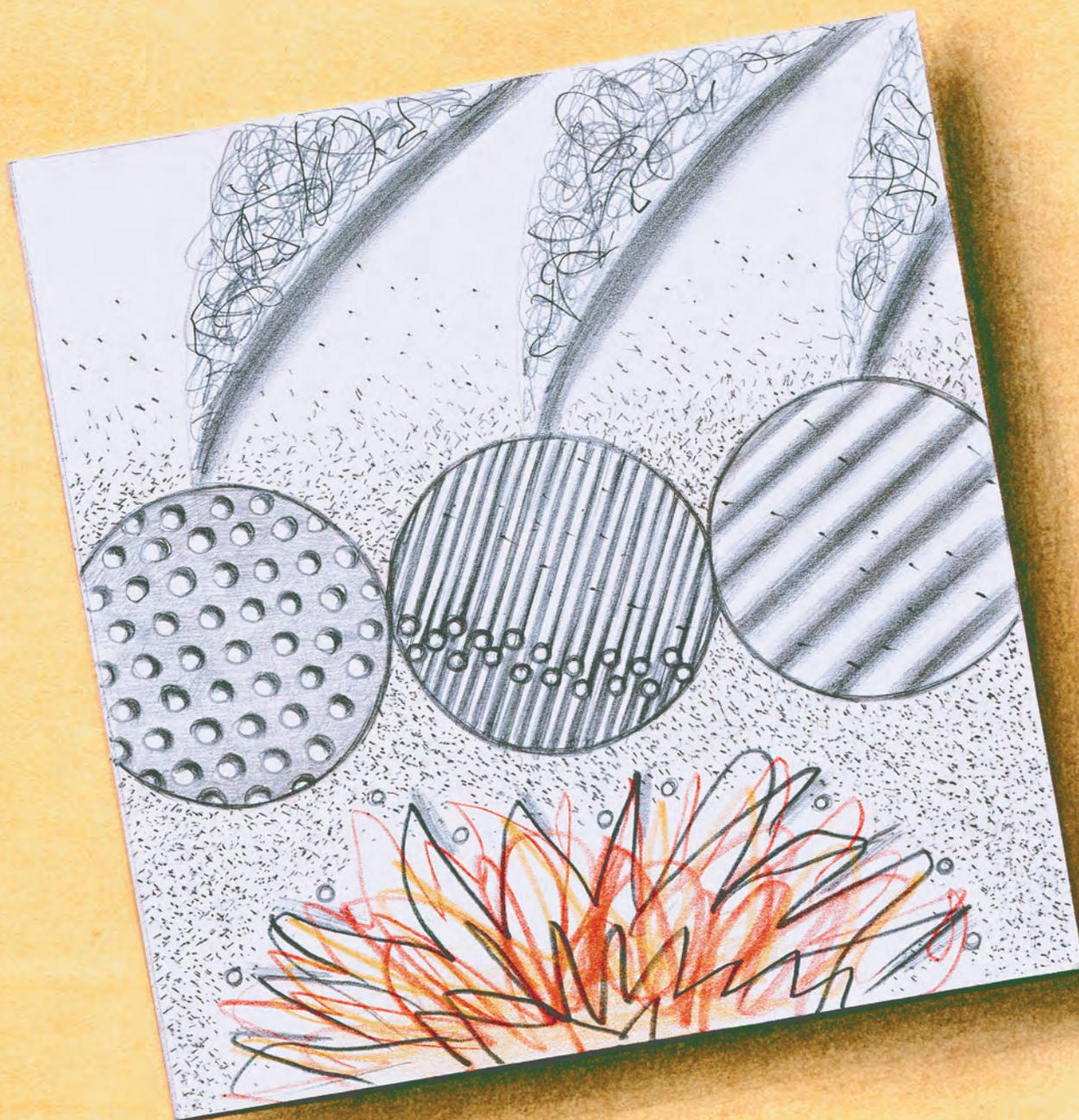
МАРТ / АПРЕЛЬ

ISSN 0130-2221

2016 • № 2

# КВАНТ

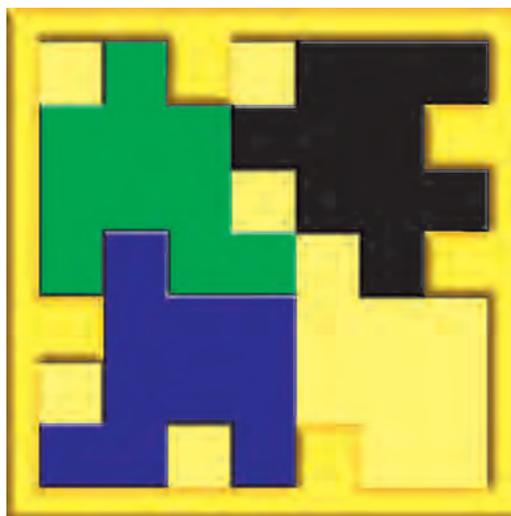
НАУЧНО-ПОПУЛЯРНЫЙ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ



# НЕПРОСТАЯ УПАКОВКА

Задача в этой головоломке понятна: разместить все четыре цветные детали внутри рамки. Непонятно только, как этого добиться. По крайней мере – с первого взгляда – автор, американский изобретатель Дэн Дьел (Dan Diehl), предусмотрел несколько подвохов: детали можно поворачивать и переворачивать, а в рамке всегда будут оставаться пустые места, как бы вы не укладывали детали. Даже пять выступов по краям рамки не сильно упрощают перебор. Тем не менее, у задачи есть всего одно решение. Желаем удачи в его поиске!

Е.Епифанов



**В номере:**

<p>УЧРЕДИТЕЛИ</p> <p>Российская академия наук</p> <p>Математический институт им. В.А.Стеклова Российской академии наук</p> <p>Физический институт им. П.Н.Лебедева Российской академии наук</p>	<p>2 О различных расстояниях между точками на плоскости. <i>Р.Просанов</i></p> <p>10 Эффекты размера и формы в молекулярной физике. <i>С.Варламов, А.Гуденко</i></p>
<p>ГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР</p> <p><b>А.Л.Семенов</b></p> <p>РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ</p> <p>Н.Н.Андреев, А.Я.Белов, Ю.М.Брук, А.А.Варламов, С.Д.Варламов, А.Н.Виленкин, В.И.Голубев, Н.П.Долбилин, С.А.Дориченко, В.Н.Дубровский, А.А.Егоров, А.А.Заславский, П.А.Кожевников (<i>заместитель главного редактора</i>), С.П.Коновалов, А.А.Леонович, Ю.П.Лысов, В.В.Произволов, В.Ю.Протасов, А.М.Райгородский, Н.Х.Розов, А.Б.Сосинский, А.Л.Стасенко, В.Г.Сурдин, В.М.Тихомиров, В.А.Тихомирова, А.И.Черноуцан (<i>заместитель главного редактора</i>)</p>	<p>ЗАДАЧНИК «КВАНТА»</p> <p>14 Задачи M2414–M2420, Ф2420–Ф2427</p> <p>15 Решения задач M2396–M2404, Ф2403–Ф2412</p>
<p>РЕДАКЦИОННЫЙ СОВЕТ</p> <p>А.В.Анджанс, М.И.Башмаков, В.И.Берник, В.Г.Болтянский, А.А.Боровой, Н.Н.Константинов, Г.Л.Коткин, С.П.Новиков, Л.Д.Фаддеев</p>	<p>«КВАНТ» ДЛЯ МЛАДШИХ ШКОЛЬНИКОВ</p> <p>25 Задачи</p> <p>26 Чья площадь больше. <i>К.Кохась</i></p> <p>29 Большой рот в полете. <i>А.Летов</i></p>
<p>РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ 1970 ГОДА</p> <p>ГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР</p> <p><b>И.К.Кикоин</b></p> <p>ПЕРВЫЙ ЗАМЕСТИТЕЛЬ ГЛАВНОГО РЕДАКТОРА</p> <p><b>А.Н.Колмогоров</b></p>	<p>ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТАТИВ</p> <p>30 О моментах инерции. <i>А.Буров</i></p>
<p>Л.А.Арцимович, М.И.Башмаков, В.Г.Болтянский, И.Н.Бронштейн, Н.Б.Васильев, И.Ф.Гинзбург, В.Г.Зубов, П.Л.Капица, В.А.Кириллин, Г.И.Косоуров, В.А.Лешковцев, В.П.Лишевский, А.И. Маркушевич, М.Д.Миллионщиков, Н.А.Патрикеева, Н.Х.Розов, А.П.Савин, И.Ш.Слободецкий, М.Л.Смолянский, Я.А.Сморodinский, В.А.Фабрикант, Я.Е.Шнайдер</p>	<p>КАЛЕЙДОСКОП «КВАНТА»</p> <p>32 Равновеликость и равноставленность</p>
	<p>МАТЕМАТИЧЕСКИЙ КРУЖОК</p> <p>36 Лемма биссектрального треугольника. <i>А.Карлюченко, Г.Филипповский</i></p> <p>39 Задача Аджанс о 32 клетках. <i>Д.Кузнецов</i></p>
	<p>ЛАБОРАТОРИЯ «КВАНТА»</p> <p>41 Спасем водолаза. <i>А.Панов</i></p>
	<p>ПРАКТИКУМ АБИТУРИЕНТА</p> <p>44 Электростатика для умных школьников. <i>А.Зильберман</i></p>
	<p>ОЛИМПИАДЫ</p> <p>52 Региональный этап XLII Всероссийской олимпиады школьников по математике</p> <p>53 Региональный этап XLX Всероссийской олимпиады школьников по физике</p>
	<p>57 Ответы, указания, решения</p>
	<p>НА ОБЛОЖКЕ</p> <p>I <i>Иллюстрация к статье С.Варламова, А.Гуденко</i></p> <p>II <i>Коллекция головоломок</i></p> <p>III <i>Шахматная страничка</i></p> <p>IV <i>Прогулки с физикой</i></p>

# О различных расстояниях между точками на плоскости

Р.ПРОСАНОВ

## Как все началось

Известный венгерский математик Пол Эрдёш оставил после себя обширное наследие, состоящее не только из множества замечательных решенных им проблем, но и из большого числа задач, которые он лишь сформулировал. Задачам Эрдёша свойственна естественность постановки и простота формулировки, но вот для решения их зачастую приходится придумывать весьма нетривиальные методы, иногда влекущие за собой много больше, чем ответ на исходный вопрос. Об одном из таких результатов, доказательство которого вызвало бурное обсуждение среди математиков, занимающихся комбинаторной геометрией, мы и поговорим в этой статье.

Рассмотрим на плоскости множество  $P$  из  $n$  точек. Посчитаем всевозможные расстояния между ними и обозначим за  $D(P)$  число различных среди получившихся чисел. Зададимся теперь вопросом: а какие значения может принимать эта величина? Очевидно, что мы легко можем выбрать точки так, чтобы все расстояния были различны, соответственно,  $D(P)$  будет равно  $n(n-1)/2$ , и это его максимальное возможное значение. А вот насколько мало оно может быть? Этот вопрос оказался куда более сложен.

Давайте подумаем, сколько различных расстояний может определять множество точек на плоскости при каких-то конкретных небольших  $n$  (рис. 1). При  $n = 2$  это совсем не вопрос: есть две

точки, между ними одно расстояние и все. При  $n = 3$  несложно заметить, что три точки определяют всего три расстояния, среди них могут быть все различны, могут совпасть только два из них (случай равнобедренного, но не равностороннего треугольника), а могут совпасть вообще все три (случай равностороннего треугольника). Между четырьмя точками уже 6 расстояний, и можно понять, что уже все они между собой равны быть не могут (почему, кстати?), так что в этом случае  $D(P) > 1$ . Но так же легко выяснить, что  $D(P)$  может быть равно 2: это случай квадрата. В том, что  $D(P)$  для четырех точек может принять все значения от 2 до 6, довольно просто убедиться самостоятельно. Для пяти точек  $D(P)$  также может принять значение 2 (правильный пятиугольник), а вот для шести точек ровно двух различных расстояний уже не может быть (доказать это, однако, не совсем просто, но все же и не сложно, попробуйте сделать это самостоятельно).

Немного обдумав факты о поведении величины  $D(P)$  при маленьких значениях  $n$ , довольно быстро можно прийти к выводу, что точное определение минимума  $D(P)$  при фиксированном  $n$  является достаточно сложной задачей. В комбинаторике вообще и в комбинаторной геометрии в частности математики часто сталкиваются с такими проблемами (которые обычно зависят от одного или нескольких натуральных параметров: в данном случае это число точек  $n$ ), когда дать точный ответ кажется занятием практически невозможным. В таких ситуациях, однако, математики не отчаиваются, а занимаются тем, что изучают то, как примерно должен меняться ответ в зависимости от изменения параметра. Чаще всего их интересует, что происходит при стремлении параметров к бесконечности: при каких-то конкретных небольших значениях всегда можно или посчитать что-то руками самому (как мы это уже проделали в совсем простых случаях), или доверить эту работу компьютеру. А вот что приблизительно должно ожидаться для достаточно больших значений параметров, так просто уже не выразишь, тут нужны какие-то достаточно общие конструкции. То, что получается в итоге, называ-

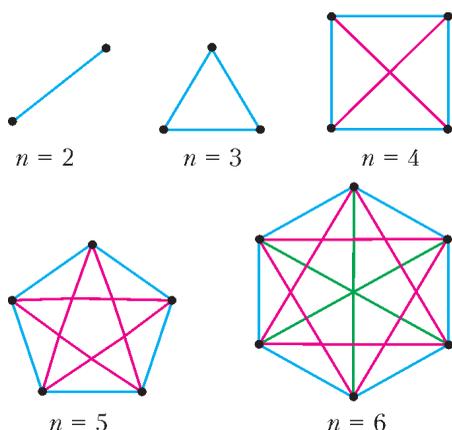


Рис. 1

ют асимптотическими оценками. Часто в таких оценках ответ получают с точностью до постоянного множителя, точное значение которого уже не является сильно важным, или с точностью до какого-то слагаемого, которое стремится к нулю при росте параметров. Например, касательно нашей задачи: в своей статье 1946 года Эрдёш придумал способ, как строить множество, для которого  $D(P) \sim n/\sqrt{\log n}$  (это значит, что при достаточно больших  $n$  отношение величин  $D(P)$  и  $cn/\sqrt{\log n}$  стремится к 1, где  $c$  – это некоторая константа, не зависящая ни от выбора  $P$ , ни от  $n$ ), и предположил, что это экстремальный случай, т.е. для *любого* множества  $P$  из  $n$  точек  $D(P) \geq cn/\sqrt{\log n}$ .

Это как раз тот тип утверждения, о котором мы говорили: существует такая константа  $c$ , что  $a \geq cb$ , где  $a$  и  $b$  – некоторые переменные величины. Для упрощения записи мы в этом случае будем дальше писать  $a \gtrsim b$ . Заметим также, что приняв договоренность о том, что мы не очень-то интересуемся погрешностями, равными постоянным величинам, мы можем даже не заботиться о том, по какому основанию мы берем логарифм. Можно, конечно, просто договориться брать его, например, по натуральному основанию  $e$ , но если мы вдруг захотим перейти от основания  $a$  к какому-то другому основанию  $b$ , то, как мы знаем, это происходит по следующей формуле:  $\log_a n = (\log_a b) \cdot (\log_b n)$  – значение изменяется в константу раз  $\log_a b$ , не зависящую от  $n$ . Так что об основании логарифма можно не беспокоиться. Как мы можем убедиться, зазор между  $n/\sqrt{\log n}$  и  $n(n-1)/2$  при больших  $n$  достаточно большой, т.е.  $D(P)$  может изменяться довольно-таки значительно.

Пример Эрдёша устроен очень просто, но вот доказать точно, сколько различных расстояний он определяет, дело весьма нетривиальное и требует привлечения техники, находящейся за пределами этой статьи. Опишем же его. Читатель, который уже попытался самостоятельно представить, как должно быть устроено множество на плоскости, чтобы задавать не слишком много различных расстояний, вполне мог прийти к идее того, что это множество должно быть достаточно симметричным и, так сказать, «равномерным». Хороший пример такого множества – это что-то вроде набора из вершин какой-нибудь решетки на плоскости. И в самом деле, давайте рассмотрим квадратный кусок самой обычной целочисленной решетки (рис.2): множество таких точек с целыми координатами  $(x, y)$ , что  $0 \leq x, y \leq \sqrt{n}$  – примерно  $n$  точек (на небольшие отклонения от этого числа при конкретных значениях  $n$  мы не будем

обращать внимания). • • • • • • • •  
Измерим расстояние • • • • • • • •  
между какими-то дву- • • • • • • • •  
мя точками из этого • • • • • • • •  
множества. По теореме • • • • • • • •  
Пифагора его квадрат • • • • • • • •  
равен  $u^2 + v^2$ , где  $u$  и  $v$  • • • • • • • •  
– какие-то неотрица- • • • • • • • •  
тельные целые числа, • • • • • • • •  
не большие  $\sqrt{n}$ . Квад- • • • • • • • •  
рат расстояния – целое Рис. 2  
число, и максимально

он может быть равен  $2n$ , отсюда различных расстояний уж точно не больше  $2n$ . Чтобы оценить точнее, мы от геометрической задачи о расстояниях между точками приходим к чисто теоретико-числовому вопросу: какие натуральные числа, не превосходящие  $2n$ , представимы в виде суммы двух квадратов целых чисел и сколько их? Ответ на первую половину вопроса достаточно хорошо известен и весьма красив: это в точности те числа, в разложение которых на простые множители любое простое число вида  $4k + 3$  входит в четной степени (этот замечательный факт называется теоремой Ферма–Эйлера, подробнее о нем см., например, статью В. Сендерова и А. Спивака «Суммы квадратов и целые гауссовы числа» в «Кванте» №3 за 1999 год). А вот чтобы оценить количество таких чисел, требуется очень продвинутой аналитической техники, которая как раз и дает нам указанную Эрдёшем оценку:  $cn/\sqrt{\log n}$ .

За все время, прошедшее после появления этой работы, строить множества с меньшим  $D(P)$  никто так и не научился, так что гипотеза Эрдёша о том, что этот пример наиболее экстремальный, кажется весьма оправданной (тем более с появлением последних результатов). Но вот только и с доказательством того, что меньше не бывает, до самых недавних пор все обстояло не слишком хорошо. И сейчас мы обсудим одну из ключевых идей, с помощью которой несколько лет назад двумя выдающимися математиками Ларри Гудом и Нецем Кацем была получена оценка  $D(P) \gtrsim n/\log n$ , что, с точностью до корня в знаменателе, очень похоже на верхнюю оценку из примера Эрдёша.

Удивительными жемчужинами в математике являются такие задачи, которые очень просто сформулировать, но очень сложно доказать по каким-то не слишком ясным поначалу обстоятельствам. Задача о расстояниях Эрдёша оказалась именно такой. Она вызвала к жизни целую новую ветвь в комбинаторной геометрии (а именно, так называемый *полиномиальный метод*), и математики потратили множество усилий на то,

чтобы уяснить истинную природу этой задачи, понять, почему ее действительно трудно решить, а затем придумать методы для устранения этих трудностей. Это замечательная история, и здесь мы расскажем небольшой ее кусочек.

Одним из ключевых моментов работы Гута и Каца стало аккуратное развитие давней блестящей идеи Дьёрдя Элекеша, который еще в начале 2000-х годов предложил, как с помощью одного хитрого преобразования свести исходную задачу Эрдёша к некоторому вопросу о том, как пересекаются кривые в трехмерном пространстве (а казалось бы, как связаны различные расстояния и пересечения каких-то кривых?). Гут и Кац добились того, чтобы вышеупомянутые кривые стали обыкновенными прямыми, и успешно решили задачу в ее новой постановке (что оказалось также весьма нетривиальным делом). Именно о преобразовании Элекеша пойдет далее речь.

### Упражнения

1. Найдите минимальное число различных расстояний для 6 и 7 точек. Докажите минимальность в каждом случае.

2. Пусть точки расположены не на плоскости, а на прямой (и их  $n$  штук). Найдите в этом случае минимум  $D(P)$ .

### Преобразование Элекеша, или При чем тут пересечения прямых

Пусть  $P$  – наше множество точек на плоскости. Рассмотрим теперь множество  $Q(P)$  таких упорядоченных четверок  $(p_1, p_2, p_3, p_4)$  точек из  $P$ , что расстояние между точками  $p_1$  и  $p_2$  равно расстоянию между точками  $p_3$  и  $p_4$  и не равно нулю. (Таким образом, точка  $p_1$  могла совпасть с точкой  $p_3$  или  $p_4$ , но не с  $p_2$ , аналогично  $p_2$ .) Обозначим  $Q(P) = |Q(P)|$  – количество таких четверок. (Вообще,  $|X|$  в математике традиционно обозначает мощность множества  $X$ , т.е. количество элементов в нем.) Интуиция подсказывает нам, что если множество  $P$  таково, что  $D(P)$  мало, то некоторые расстояния часто повторяются, а значит,  $Q(P)$  должно быть велико, т.е. величины  $D(P)$  и  $Q(P)$  связаны между собой. Более точно это выражается следующим образом.

**Лемма 1.**  $D(P)Q(P) \geq (n^2 - n)^2$ .

**Доказательство.** Пусть  $d_1, \dots, d_{D(P)}$  – различные расстояния, встречающиеся между точками из  $P$ . Всего у нас есть  $n^2 - n$  различных упорядоченных пар  $(p_1, p_2)$  точек из  $P$ . Пусть среди них  $n_i$  находятся на расстоянии  $d_i$ . Тогда  $\sum_{i=1}^{D(P)} n_i = n^2 - n$ .

При этом несложно заметить, что  $Q(P) = \sum_{i=1}^{D(P)} n_i^2$ . Вследствие неравенства между средним квадра-

тичным и средним арифметическим имеем

$$(n^2 - n)^2 = \left( \sum_{i=1}^{D(P)} n_i \right)^2 \leq \left( \sum_{i=1}^{D(P)} n_i^2 \right) D(P) = Q(P) D(P),$$

что и требовалось.

Заметим, что для некоторой константы  $c$  справедливо неравенство  $(n^2 - n)^2 \leq cn^4$ . Поэтому для того чтобы доказать, что  $D(n) \geq n/\log n$ , достаточно будет показать, что  $Q(P) \leq n^3 \log n$ .

Напомним читателю, что *движением плоскости* называется преобразование плоскости, сохраняющее расстояние между точками. Замечательная *теорема Шаля* дает нам полную классификацию движений плоскости: она утверждает, что любое движение плоскости – это либо поворот, либо параллельный перенос, либо осевая симметрия, либо композиция осевой симметрии и параллельного переноса. Первые два типа движений называют сохраняющими ориентацию, а остальные – меняющими ее (на самом деле определение сохраняющих и меняющих ориентацию движений обычно немного другое, но мы не будем сейчас вдаваться в эти детали). Интересующиеся могут почитать на эту тему [4].

Для нашего конечного множества точек  $P$  нас будут интересовать те движения плоскости, которые переводят некоторые точки из  $P$  в какие-то другие точки из  $P$ . Несложно заметить, что наше множество  $Q(P)$  значительно связано с наличием таких движений. А именно, справедлива

**Лемма 2.** Пусть  $(p_1, p_2, p_3, p_4) \in Q(P)$ . Тогда существует единственное сохраняющее ориентацию движение  $g$  такое, что  $g(p_1) = p_3$ , а  $g(p_2) = p_4$ .

**Доказательство.** В самом деле, длины отрезков  $p_1p_2$  и  $p_3p_4$  равны. Совместим параллельным переносом  $p_1$  и  $p_3$ , после чего повернем наш отрезок так, чтобы  $p_2$  совпало с  $p_4$  (рис.3). Наше  $g$  есть композиция проделанных параллельного переноса и поворота. Ясно, что такое движение единственно. Лемма доказана.

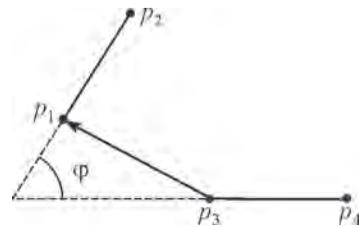


Рис. 3

Теперь мы можем сопоставить каждой четверке точек из  $Q(P)$  то самое единственное движение из леммы 2. Наша цель состоит в использовании этого сопоставления для оценки величины  $Q(P)$ .

Как мы только что упоминали, теорема Шаля говорит нам, что сохраняющие ориентацию движения существенно делятся на два типа: повороты и параллельные переносы. Следующее утверждение говорит нам, что параллельные переносы дают не слишком большой вклад в оценку  $Q(P)$ .

**Лемма 3.** Четверок, которым сопоставлен параллельный перенос, не больше чем  $n^3$ .

**Доказательство.** Пусть  $(p_1, p_2, p_3, p_4)$  – четверка из  $\mathcal{Q}(P)$ , которой сопоставлен параллельный перенос  $g$ . Так как  $g(p_1) = p_3$ ,  $g(p_2) = p_4$  и  $g$  – параллельный перенос, то отрезок  $p_3p_1$  равен и параллелен отрезку  $p_4p_2$ , т.е. точка  $p_4$  однозначно восстанавливается по тройке  $(p_1, p_2, p_3)$ . Так как таких троек не больше чем  $n^3$ , то и всего четверок, которым сопоставлен параллельный перенос, не больше чем  $n^3$ . Лемма доказана.

При  $n > 2$  число  $n^3$  явно меньше, чем  $n^3 \log n$ . Казалось бы, осталось разобраться с поворотами и все! Но оказывается, что именно в этом и кроется подвох. Выяснение вопросов, связанных с поворотами, как раз и приведет нас к некоторым задачам о пересечениях прямых. Для дальнейших рассуждений выбросим из рассмотрения те четверки, которым сопоставлен параллельный перенос, и будем думать, что в  $\mathcal{Q}(P)$  остались только те четверки, которым достался поворот.

Прежде всего заметим, что, разумеется, разным четверкам не обязательно соответствуют разные повороты. То, сколько различных четверок сопоставлено некоторому повороту  $g$ , непосредственно связано с размером множества  $P \cap gP$ , где  $gP$  – множество, которое получилось из точек  $P$  после применения к ним движения  $g$ , это множество еще называется *образом*  $P$  под действием  $g$ . Сформулируем последнюю мысль более точно.

**Лемма 4.** Пусть  $|P \cap gP| = k$ . Тогда повороту  $g$  сопоставлено  $k(k-1)$  четверок.

**Доказательство.** Пусть  $P \cap gP = \{p_1, \dots, p_k\}$ , обозначим  $q_i = g^{-1}p_i$  – прообраз  $p_i$ , т.е.  $q_i$  – та точка, которая после применения поворота  $g$  перейдет в  $p_i$ . Поскольку  $g$  сохраняет расстояние, то ясно, что каждая упорядоченная пара  $(q_i, q_j)$  определяет четверку точек  $(q_i, q_j, p_i, p_j)$  из  $\mathcal{Q}(P)$  и все такие четверки описываются таким образом. А таких пар в точности  $k(k-1)$ , что и требовалось.

Положим  $G_{=k}(P)$  – число поворотов, для которых  $|P \cap gP| = k$ . Мы получаем, что  $Q(P) = \sum_{k=2}^n k(k-1)G_{=k}(P)$ . Обозначим теперь  $G_k(P)$  – число поворотов, для которых  $|P \cap gP| \geq k$ . Для наших целей будет чуточку удобнее работать с  $G_k(P)$ , чем с  $G_{=k}(P)$ . Очевидно, что  $G_{=k}(P) = G_k(P) - G_{k+1}(P)$ . Подставив это в выражение для  $Q(P)$  и, немного манипулируя с суммой, получим

$$\begin{aligned} Q(P) &= \sum_{k=2}^n k(k-1)(G_k(P) - G_{k+1}(P)) = \\ &= \sum_{k=2}^n k(k-1)G_k(P) - \sum_{k=2}^n k(k-1)G_{k+1}(P) = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \sum_{k=2}^n k(k-1)G_k(P) - \sum_{k=3}^{n+1} (k-1)(k-2)G_k(P) = \\ &= 2 \cdot 1 \cdot G_1(P) - n(n-1)G_{n+1}(P) + \\ &+ \sum_{k=3}^n (k(k-1)G_k(P) - (k-1)(k-2)G_k(P)) = \\ &= 2G_1(P) + \sum_{k=3}^n (k(k-1) - (k-1)(k-2))G_k(P) = \\ &= 2G_1(P) + \sum_{k=3}^n 2(k-1)G_k(P) = \sum_{k=2}^n (2k-2)G_k(P). \end{aligned}$$

(Здесь просто используется сдвиг индекса во второй сумме, а также то, что  $G_{n+1}(P) = 0$ . Для того чтобы убедиться в приведенной выкладке, советуем читателю проделать ее самостоятельно.)

Теперь, чтобы доказать, что  $Q(P) \lesssim n^3 \log n$ , достаточно получить, что  $G_k(P) \leq n^3/k^3$ . В самом

деле,  $\sum_{k=2}^n (2k-2)/k^2 \lesssim \sum_{k=2}^n 1/k \leq \log n$  – последнее неравенство является простым результатом математического анализа, и читателя, который не знаком с началами анализа, мы попросим просто принять его на веру (можно обратиться к недавней статье А. Егорова «Интеграл и оценки сумм» из Кванта №4 за 2015 год).

Осталось взяться как следует за оценку величины  $G_k(P)$ . Любой поворот  $\rho$  очевидно задается тремя параметрами: двумя координатами центра поворота  $(x, y)$  и углом  $\varphi$ . Сопоставим этому повороту точку в трехмерном пространстве с координатами  $(x, y, \operatorname{ctg} \frac{\varphi}{2})$ . Оказывается, это геометрическое представление очень удобно для дальнейшей работы (вообще говоря, то, что мы сделали, называется выбором глобальных координат в многообразии поворотов).

Рассмотрим две различные точки  $p$  и  $q$ . Поскольку поворот сохраняет расстояния, то, если поворот переводит точку  $p$  в точку  $q$ , его центр находится на равном расстоянии от этих точек, поэтому он обязательно лежит на срединном перпендикуляре к отрезку с концами в этих точках. С другой стороны, очевидно, что любая точка на срединном перпендикуляре определяет некоторый поворот относительно этой точки, переводящий  $p$  в  $q$ . В итоге получаем, что срединный перпендикуляр является геометрическим местом центров поворотов, переводящих  $p$  в  $q$ . А что будет, если это множество поворотов представить в наших описанных выше координатах? Более точно, пусть  $S_{pq}$  – кривая в трехмерном пространстве, являющаяся образом множества всех поворотов, переводящих  $p$  в  $q$  в этих координатах. Тогда верно следующее (рис.4).

**Лемма 5.**  $S_{pq}$  – это прямая.

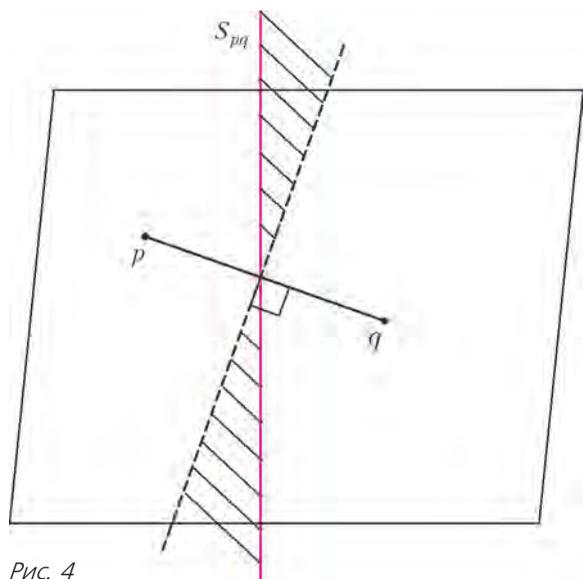


Рис. 4

**Доказательство.** Пусть координаты точек  $p$  и  $q$  на плоскости равны  $(p_x, p_y)$  и  $(q_x, q_y)$  соответственно. Проверим, что  $S_{pq}$  – это в точности прямая, заданная уравнением

$$\left( \frac{p_x + q_x}{2}, \frac{p_y + q_y}{2}, 0 \right) + t \left( \frac{q_y - p_y}{2}, \frac{p_x - q_x}{2}, 1 \right).$$

Прежде всего заметим, что уравнение срединного перпендикуляра к  $pq$  на плоскости – это и в самом деле  $\left( \frac{p_x + q_x}{2}, \frac{p_y + q_y}{2} \right) + t \left( \frac{q_y - p_y}{2}, \frac{p_x - q_x}{2} \right)$  (будем обозначать его точки  $r(t)$  соответственно). По сути, осталось убедиться только, что если для точки  $r(t)$  поворот, переводящий  $p$  в  $q$ , задается углом  $\varphi$ , то верно, что  $\operatorname{ctg} \frac{\varphi}{2} = t$ . Это проверяется непосредственным вычислением.

И что же теперь это дает нам? Пусть  $L$  – множество из  $n(n-1)/2$  прямых в трехмерном пространстве вида  $S_{pq}$ , где  $p$  и  $q$  – различные точки из  $P$ . К чему тогда сводится наш вопрос оценки величины  $G_k(P)$ ? Очевидно, что если поворот  $g$  таков, что  $|P \cap gP| \geq k$ , то точка, соответствующая  $g$ , лежит не меньше чем на  $k$  прямых из  $L$ . Соответственно, мы свели все к вопросу: есть множество прямых, рассмотрим множество точек, в которых пересекается хотя бы  $k$  из них; как можно оценить сверху размер этого множества? Это и есть базовый вопрос раздела математики под названием *геометрия инцидентностей*.

#### Упражнения

3. Пусть  $P$  – это множество точек: а) треугольника; б) квадрата; в) правильного пятиугольника. Нарисуйте, как выглядит сопоставляемое ему соответствующее множество  $L$  прямых в пространстве.

4. Пусть  $S$  – целое число,  $P$  – множество точек вида

$(x, y)$ , где обе координаты целые и  $x^2 + y^2 \leq 2S$ , а  $L$  – множество прямых, соответствующее  $P$ . Докажите, что если точки  $(a, b)$  и  $(c, d)$  лежат в круге  $x^2 + y^2 \leq S$ , то прямая, проходящая через точки  $(a, b, 0)$  и  $(c, d, 1)$ , содержится в  $L$ .

5. Пусть  $T(P)$  – количество попарно различных невырожденных треугольников, задаваемых множеством  $P$  из  $n$  точек на плоскости (треугольники различны, если они не являются равными, т.е. не совмещаются наложением), а  $Q_T(P)$  – количество пар невырожденных треугольников  $(T_1, T_2)$  таких, что  $T_1 = T_2$ . Придумайте неравенство, аналогичное лемме 1, связывающее  $T(P)$  и  $Q_T(P)$ .

#### И что теперь?

До работы Гута и Каца лучшим результатом по задаче о различных расстояниях был результат 2004 года Каца и Тардоша, показывавший, что  $D(P) \gtrsim n^{0,8641}$ . Читатель должен примерно представлять себе поведение степенных функций, так что он должен понимать, что если  $k < 1$ , то зазор между числами  $n$  и  $n^k$  растет очень быстро при  $n$ , стремящемся к бесконечности. Поэтому в такой науке, как асимптотическая комбинаторика, для которой важно именно поведение изучаемых величин при очень больших значениях параметров, такие вещи, как показатели степеней в ответе, являются принципиально важными, и любое даже самое незначительное улучшение в оценке таких показателей всегда считается большим продвижением. Поэтому, когда в 2011 году (совсем недавно!) Гут и Кац доказали, что  $D(P) \gtrsim n/\log n$ , это стало огромным прорывом (а как раз таки разница в корне над логарифмом является весьма незначительным отличием от верхней оценки). Заметим, однако, что, как это обычно бывает в математике, главным оказалось не сколько то, что было получено большое продвижение по старой классической задаче, столько то, каким именно образом оно было сделано. В самом деле, методы из этой статьи вызвали бурный всплеск активности в комбинаторной геометрии, почти сразу было написано немало статей, использующих идеи Гута и Каца для доказательства различных новых результатов и решения некоторых вопросов, стоявших без ответа достаточно много времени. Как уже было замечено выше, особенно тесно их результаты связаны с наукой, изучающей различные вопросы о пересечениях прямых.

Чтобы понять, что нам теперь делать с тем, что получилось в предыдущем разделе, сделаем небольшой экскурс в эту науку. Для начала разберемся, что происходит на плоскости, а именно, зададим ровно тот же вопрос: есть множество  $L$  из  $m = |L|$  прямых; рассмотрим множество точек, в которых пересекается хотя бы  $k$  из них, обозначим их количество  $S_k(L)$ . Как велико может быть

это число? Ясно, что интереснее всего случай, когда  $m$  достаточно большое, а  $k$  не слишком мало и не слишком велико.

На самом деле, впервые этот вопрос задал все тот же Пол Эрде́ш. А именно, он построил пример, для которого  $S_k(L) = c(m^2/k^3 + m/k)$ , и снова предположил, что это асимптотически наилучший результат при достаточно больших  $n$  и  $k$ . Для этой задачи решение не заставило себя долго ждать, и в 1983 году Эндре Семереди и Вильям Троттер выпустили статью с подтверждением данного факта, в их честь соответствующее утверждение теперь называется теоремой Семереди–Троттера.

Казалось бы, данная наука не должна быть очень глубокой. Мы знаем, что две почти любые прямые на плоскости, если они только не параллельны, пересекаются в одной точке (а если мы перейдем на проективную плоскость, то слово «почти» можно и убрать), а также что через любые две точки проходит ровно одна прямая. Вроде как это все. Очень поучительным наблюдением оказывается то, что этих фактов недостаточно,

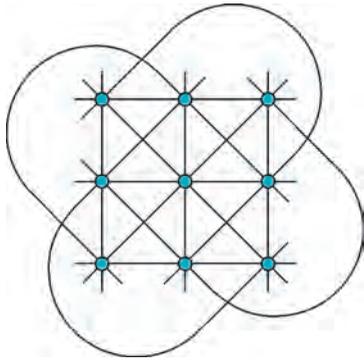


Рис. 5

чтобы доказать теорему Семереди–Троттера. Более подробно, можно построить такую вещь, как конечная плоскость; естественным образом определяется, что такое прямая на ней (на рисунке 5 приведен пример конечной аффинной плоскости порядка 3, на ней всего 9 точек и 12 прямых). Оказывается, что вышеупомянутые базовые факты о прямых верны и на конечной плоскости. Но вот только теорема Семереди–Троттера оказывается неверной! На конечной аффинной плоскости из  $q^2$  элементов существует такое множество из  $q^2$  прямых, для которого  $S_q(L) = q^2$ , в то время как если бы это происходило на обычной плоскости, то теорема давала бы оценку  $S_q(L) \leq q$ . Немаленький, однако, разрыв. Понадобилось некоторое время для того, чтобы понять, какие фундаментальные вещи стоят за всем этим, и придумать метод (так называемый метод *клеточных разбиений*), чтобы разобраться с ними. Мы не будем сейчас останавливаться на этом более подробно и отсылаем заинтересованного читателя к [3].

Вернемся теперь к интересующему нас вопросу. У нас есть множество  $L$  из  $\sim n^2$  прямых в трехмерном пространстве, и мы хотели бы показать, что

$S_k(L) \leq n^3/k^2$  при  $2 \leq k \leq n$ . Но ведь это же, вообще говоря, не так! Например, пусть все эти прямые лежат в одной плоскости, мы знаем, что теорема Семереди–Троттера точна, а значит, что бывают конфигурации, для которых  $S_k(L) \sim n^4/k^3 + n^2/k$ . Для  $k = 2$ , например, это выйдет  $\sim n^4$  точек пересечения. Великовато!

Казалось бы, давайте возьмем этот пример, когда пересечений между прямыми довольно много, и поищем какое-нибудь множество точек на плоскости  $P$ , из которого мы могли бы получить этот набор прямых с помощью преобразования Элекеша. Раз этот пример не вполне укладывается в нашу схему, то, наверное, и такое множество  $P$  могло бы дать нам какой-нибудь хороший пример в исходной задаче о различных расстояниях, возможно, лучше, чем придуманный Эрде́шем. Но такое представление достаточно наивно, ведь никто не гарантирует того, что любое множество прямых может быть получено с помощью нашего преобразования. Давайте попробуем немного проанализировать: если какое-то множество прямых  $L$  получено в рамках исследуемой нами задачи с помощью нашего преобразования, то насколько оно далеко от того, чтобы быть абы каким? Иначе говоря, есть ли какие-то условия на это множество? Мы вот выяснили, что если много прямых лежат в одной плоскости, то это несколько не вписывается в рамки ожидаемых нами оценок на число их точек пересечения. А что если те множества  $L$ , полученные из наших преобразований, обладают некоторыми ограничениями на количество прямых, которые могут одновременно лежать в одной плоскости? Оказывается, это действительно одно из тех замечаний, которые в итоге приведут нас к успеху.

**Лемма 6.** *Любая плоскость в трехмерном пространстве содержит не более  $n$  прямых из  $L$ .*

**Доказательство.** Для каждой точки  $p \in P$  рассмотрим множество  $L_p \subset L$ , состоящее из прямых вида  $S_{pq}$ ,  $q \in P$ . Очевидно, что если  $q \neq q'$ , то прямые  $S_{pq}$  и  $S_{pq'}$  не пересекаются (иначе существовал бы поворот, переводящий  $p$  одновременно в  $q$  и в  $q'$ , но это две различные точки). Также, посмотрев на уравнения этих прямых в лемме 5, можно заметить, что направляющие векторы этих прямых различны. А это значит, что любые две различные прямые из  $L_p$  попарно скрещиваются, т.е. не лежат в одной плоскости. Поэтому любая плоскость содержит не больше одной прямой из каждого множества  $L_p$  и уж точно не больше  $n$  прямых из  $L$ . Лемма доказана.

Достаточно ли этого для наших целей? Другими словами, снова возьмем произвольное множество из  $n^2$  прямых в пространстве, в каждой плоскости

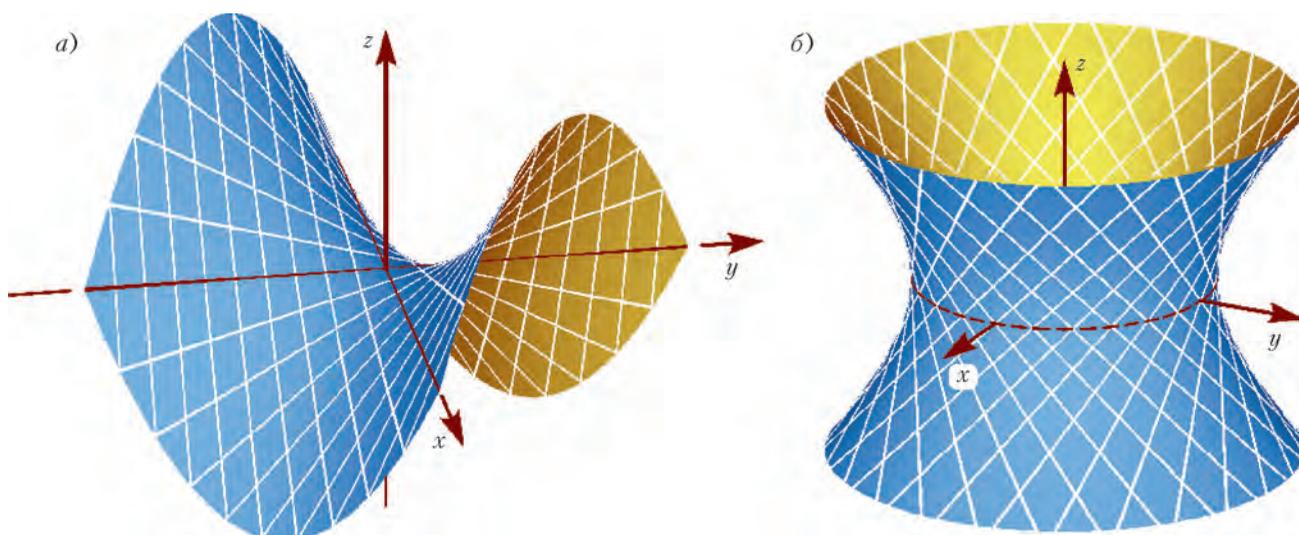


Рис. 6

лежит не более  $n$  из них. Сколько точек пересечения может быть у этих прямых? Оказывается, что их все еще может быть порядка  $n^4$ .

Рассмотрим поверхность, заданную уравнением  $z = xy$  – *гиперболический параболоид* (рис. 6,а). Эта поверхность содержит очень много прямых. Прямые на ней делятся на два типа – «вертикальные» и «горизонтальные». Для любого вещественного числа  $b$  мы обозначим  $H_b$  горизонтальную прямую вида  $(t, b, bt)$ ,  $t \in \mathbb{R}$ . Видно, что она и правда лежит на параболоиде. Аналогично, вертикальными прямыми  $V_a$  мы будем называть прямые вида  $(a, t, at)$ ,  $t \in \mathbb{R}$ . Несложно заметить, что любые две прямые одного типа не пересекаются, разных типов – пересекаются и никакие две не лежат в одной плоскости. А это значит, что если мы возьмем в качестве  $L$  множество из  $n^2/2$  вертикальных прямых нашего параболоида и  $n^2/2$  горизонтальных, то мы получим  $n^4/4$  точек пересечения – снова больше, чем желаемая нами оценка. Что же делать?

Гиперболический параболоид в данном случае является примером *дважды линейчатой поверхности* – алгебраической поверхности (т.е. множества нулей некоторого многочлена от трех переменных в трехмерном пространстве – в данном случае это многочлен  $z - xy$ ), через любую точку которой проходит ровно две прямые. Условия для поверхности довольно жесткие, и действительно, примечательный факт из науки, которая называется дифференциальной геометрией, говорит нам, что все такие поверхности по существу сводятся как раз к гиперболическим параболоидам или *однополостным гиперболоидам* (рис.6,б) – поверхностям типа  $x^2 + y^2 - z^2 = 1$ . Наш пример показывает, что если на какой-то такой поверхности лежит слишком много прямых из нашего множества, то оно легко может оказаться не

слишком удачным. Но и здесь наше конкретное множество  $L$  на деле оказывается слишком хитрым. Как вы уже догадались, можно доказать немного видоизмененный аналог предыдущей леммы, а именно: существует такая константа  $c$ , что любая дважды линейчатая поверхность содержит не больше, чем  $cn$  прямых из нашего множества  $L$ . Эту лемму мы, к сожалению, уже не сможем доказать, так как она требует привлечения нетривиальной техники из дифференциальной геометрии.

Воистину впечатляющим достижением Гута и Каца оказалось понимание того, что этих условий теперь достаточно, чтобы получить интересующую нас оценку.

**Теорема** (Л.Гут, Н.Кац, 2010). Пусть множество  $L$  из  $n^2$  прямых таково, что любая плоскость содержит не более  $n$  этих прямых и любая дважды линейчатая поверхность содержит  $\leq n$  их. Тогда  $S_k(L) \leq n^3/k^2$  при  $2 \leq k \leq n$ .

Доказать это утверждение, однако, оказалось все еще очень непросто, и необходимые для этого методы выходят далеко за пределы нашего рассказа. Тем не менее, несколько общих слов о стоящих за всем этим идеях мы в заключение скажем.

Как уже упоминалось выше, алгебраической поверхностью в трехмерном пространстве мы называем множество точек вида  $f(x, y, z) = 0$ , где  $f$  – многочлен от трех переменных. Для любого конечного множества точек существует бесконечное число алгебраических поверхностей, которые можно провести через них. В некоторых случаях это могут быть совсем простые поверхности, задаваемые многочленами не слишком высоких степеней – например, все точки могут оказаться лежащими на одной прямой. Оказывается, что если вместо множества точек рассматривать ал-

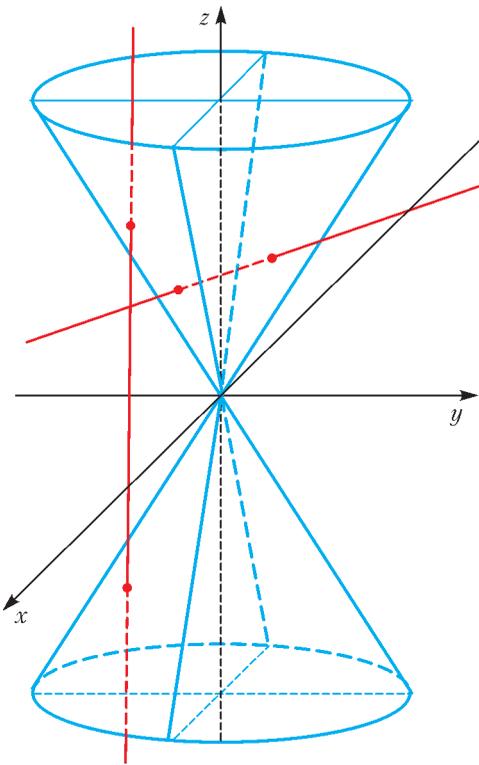


Рис. 7

гебраическую поверхность минимальной степени, содержащую это множество, то можно сделать немало полезных выводов. Здесь помогают такие утверждения: например, если прямая пересекает алгебраическую поверхность в слишком большом числе точек, то эта прямая целиком лежит в поверхности (подумайте самостоятельно, почему это так; пример изображен на рисунке 7). Также, если точка на поверхности является точкой пересечения достаточно большого числа прямых, лежащих на этой поверхности, то оказывается, что это некоторая особая точка этой поверхности, про которую мы имеем некоторую нетривиальную алгебраическую информацию. Собрав все подобные факты вместе, мы можем получить следующий очень важный тезис: *комбинаторная информация об устройстве множества точек в пространстве влечет некоторую алгебраическую информацию о нем*. Говоря менее размыто: вот берем мы множество точек, пусть оно не произвольное, а оно есть множество точек, в которых пересекается большое количество прямых из некоторого конечного набора. Это комбинаторная информация. Возьмем ту самую алгебраическую поверхность минимальной степени, содержащую это множество. Тогда, при помощи хитрых вычислений, можно, во-первых, получить четкую оценку на ее степень, во-вторых, доказать, что многие наши прямые также лежат на этой поверхности, в-третьих, выяснить, что многие наши точки на поверхности обладают некоторым особым стату-

сом. Это алгебраическая информация, и ее можно эффективно использовать теперь для оценки различных характеристик нашего множества, например его размера. В целом, мы как раз и изложили суть полиномиального метода, оказавшегося очень продуктивным в самых различных ситуациях.

Не правда ли, удивительно, как одна простая на вид комбинаторная задача оказалась совершенно иной при другом взгляде на нее и привела к появлению новых прорывных способов смотреть на вещи в комбинаторной геометрии? В таких идеях и кроется истинное эстетическое содержание математики.

### Упражнения

**6.** Теорема Семереди–Троттера часто формулируется так: есть множество  $P$  из  $n$  точек на плоскости и множество  $L$  из  $m$  прямых на плоскости. Определим число инцидентности  $I(P, L)$  – количество пар  $(p, l)$ , где  $p$  – точка из  $P$ ,  $l$  – прямая из  $L$  и  $p \in l$ . Тогда  $I(P, L) \leq m^{2/3}n^{2/3} + m + n$ . Покажите, что приведенная в тексте формулировка действительно является прямым следствием этого утверждения.

**7.** Докажите сами, что  $I(P, L) \leq n + m^2$  в обозначениях предыдущей задачи.

**8.** Пусть  $f = f(x, y) = \sum_{i,j} a_{ij}x^i y^j$  – многочлен от двух переменных. Его степенью называется максимальная степень одночлена  $x^i y^j$ , коэффициент при котором ненулевой (а степень одночлена это просто  $i + j$ ). Обозначим за  $Z(f) = \{(x, y) | f(x, y) = 0\}$  – множество точек плоскости, в которых  $f$  равно нулю. Такое множество называется алгебраической кривой (подумайте об известных вам примерах алгебраических кривых). Докажите, что если  $f$  имеет степень не больше чем некоторое  $D$ , то любая прямая  $l$  либо содержится в множестве  $Z(f)$  целиком, либо пересекает это множество не более чем в  $D$  точках. Это пример утверждения, которое обнаруживает связь между комбинаторной и алгебраической структурой множества.

**9.** В обозначениях предыдущей задачи докажите, что  $Z(f)$  содержит не более  $D$  различных прямых, если  $f$  ненулевой.

### Список литературы

1. P. Erdős. On sets of distances of  $n$  points. – Amer. Math. Monthly (1946) 53, 248–250.
2. L.Guth, N.H.Katz. On the Erdős distinct distance problem in the plane. – Адрес в интернете: arXiv:1011.4105. – 2010.
3. L.Guth. Unexpected applications of polynomials in combinatorics. – The Mathematics of Paul Erdős I., Springer New York, 2013, 493–522.
4. В.В.Прасолов. Задачи по планиметрии. – М: МЦНМО, 2006.

# Эффекты размера и формы в молекулярной физике

С.ВАРЛАМОВ, А.ГУДЕНКО

В ШКОЛЬНОЙ ФИЗИКЕ ПОДРОБНО РАССМАТРИВАЮТСЯ соотношения, связывающие макроскопические физические параметры находящегося в газообразном состоянии вещества — температуру  $T$ , давление  $p$ , объем  $V$  и количество вещества  $\nu$ . Это знаменитые газовые законы, которые объединяются в один закон Менделеева–Клапейрона:  $pV = \nu RT$ , где  $R$  — универсальная газовая постоянная.

Справочные данные по конденсированным веществам, т.е. веществам в жидком или твердом состоянии, и по их фазовым переходам в школьных учебниках тоже приводятся, но так, что возникает впечатление произвольного неупорядоченного хаоса. Из соотношений, которые связывают макроскопические параметры вещества в

конденсированном состоянии, в некоторые учебники попадает только закон Дюлонга и Пти. Этот закон утверждает, что молярные теплоемкости всех твердых тел при постоянном внешнем давлении примерно одинаковы и равны  $3R$  в диапазоне не слишком малых и не слишком больших температур.

Существуют и менее известные, но не менее интересные соотношения параметров. В данной статье мы рассмотрим явление плавления твердых тел, т.е. перехода веществ из твердого состояния в жидкое, при атмосферном давлении и определенной температуре. В справочниках приводятся температуры плавления и удельные (на единицу массы) теплоты плавления для различных веществ. Простая замена удельной теплоты

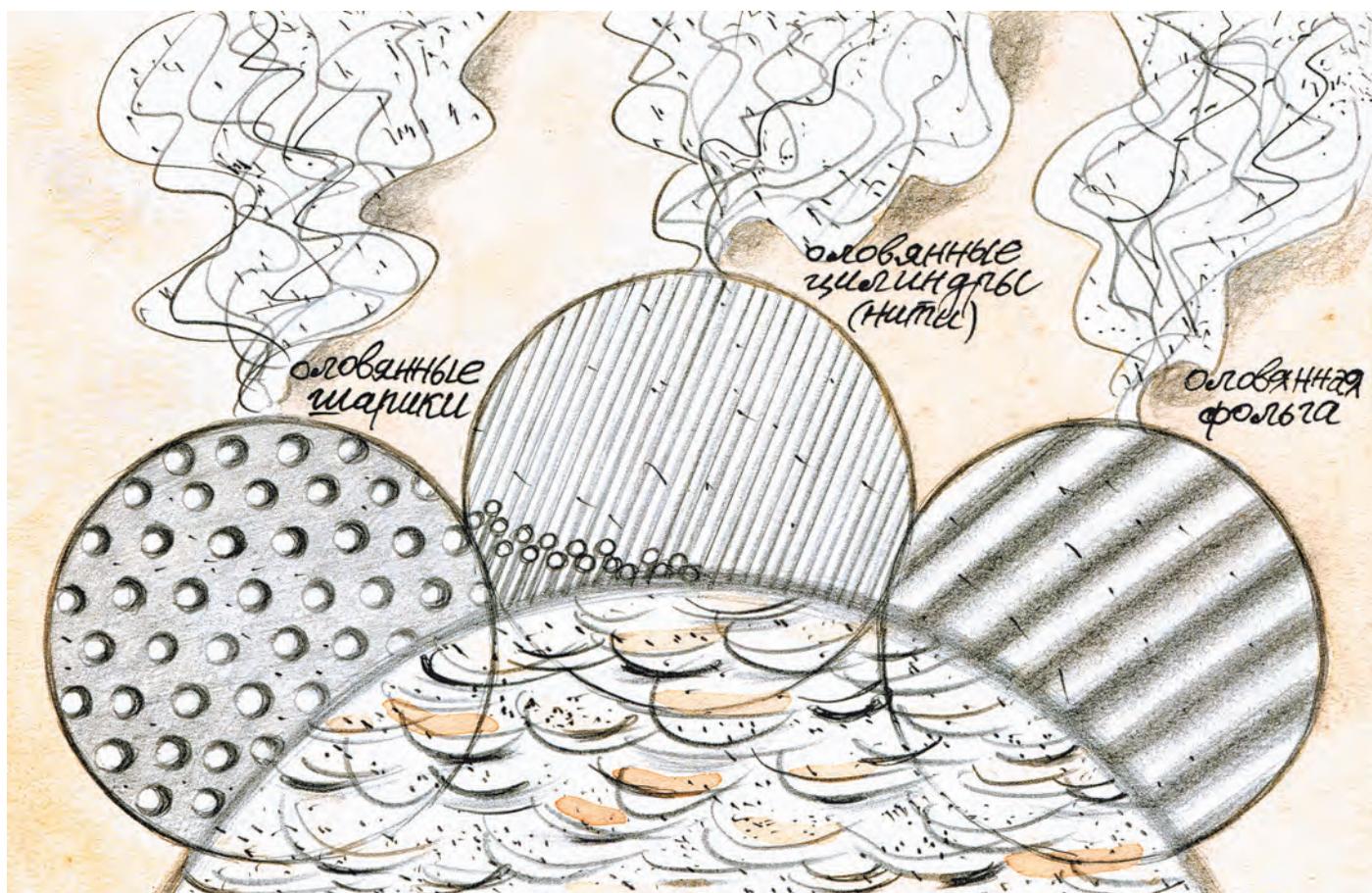


Таблица 1 соседние молекулы, находящиеся рядом в составе конденсированного вещества. Механизмов образования такой потенциальной ямы для разных атомов или молекул несколько, но они в подробностях не рассматриваются. В самой простой модели считается, что взаимодействие молекул «парное», т.е. для двух ближайших молекул существует энергия связи  $U_0$ , и на их взаимодействие наличие других молекул не влияет. Иными словами, молекулы, расположенные в конденсированном веществе *не рядом*, в этой модели не взаимодействуют. Тогда при наличии  $Z$  ближайших соседей молекула находится в потенциальной яме глубиной  $ZU_0$ .

Металл	Температура плавления $T$ (К)	Молярная теплота плавления $\lambda_M$ (Дж/моль)	Отношение $\lambda_M/T$
серебро (Ag)	1233,5	11300	9,16
золото (Au)	1336,4	12600	9,43
медь (Cu)	1356	13000	9,59
платина (Pt)	2045	20000	9,78
иридий (Ir)	2720	26300	9,67

плавления на молярную теплоту позволяет сразу увидеть связь между температурой плавления и молярной теплотой плавления.

Известны разные вещества, которые имеют подобные химические и физические свойства, в частности – очень близкие отношения молярной теплоты плавления  $\lambda_M$  к температуре плавления  $T$ . Примером такой группы веществ могут служить серебро, золото, медь, платина, иридий (табл.1). Все они в твердом состоянии при низких температурах имеют одинаковую структуру кристаллической решетки (гранцентрированную кубическую) и одинаковые (примерно) размеры атомов.

Аналогичные одинаковые отношения наблюдаются и для других близких в физическом и химическом смысле веществ. Например, весьма показательна группа веществ, которая называется

Таблица 2

Вещество	$\lambda_M/T$	Вещество	$\lambda_M/T$
аргон (Ar)	15,9	ксенон (Xe)	15,3
гелий (He)	2,8	неон (Ne)	16,5
криптон (Kr)	16,4	радон (Rn)	14,6

«благородные газы» (табл.2). Они тоже в твердом состоянии образуют гранцентрированную кубическую решетку, но у них (за исключением гелия) отношение молярной теплоты плавления к температуре плавления не такое, как для группы металлов Ag, Au..., а находится в узком диапазоне 14,6–16,5. Гелий при плавлении проявляет квантовые свойства, и для него это отношение сильно отличается от других.

Из сказанного можно сделать вывод, что для веществ с похожими химическими свойствами температура плавления пропорциональна теплоте плавления.

В молекулярно-кинетической модели вещества для объяснения возможности молекул образовывать конденсированное состояние вводится понятие глубины потенциальной ямы (энергии связи), которую друг для друга создают каждые две

Теплота плавления и теплота парообразования вещества, приходящаяся на одну молекулу, пропорциональны глубине такой ямы и зависят от количества ближайших соседей, которые находятся рядом с каждой молекулой. Логично предположить, что для разрушения кристаллической структуры при переходе из твердого состояния в жидкое для крупных кусков вещества и для кусочков небольших объемов потребуется разное количество теплоты, приходящееся на одну молекулу. Ведь у малых кусочков твердого вещества значительная доля молекул находится на поверхности, где они имеют меньшее число ближайших соседей и, соответственно, находятся в меньших по глубине потенциальных ямах.

Эксперименты с измерением температуры плавления тонких пленок разных веществ показали, что температура плавления пленки каждого вещества убывает с уменьшением толщины пленки. Это – так называемый *размерный эффект*. Выяснилось также, что температура плавления зависит не только от размеров, но и от формы образца, т.е. существует и *эффект формы*. Связано это с тем, что отношение числа молекул, живущих на поверхности, к общему количеству молекул зависит и от размеров, и от формы кусочка вещества.

Если предположить, что температура плавления пропорциональна глубине потенциальной ямы, усредненной по всем молекулам, входящим в состав кусочка вещества, то обнаруженные эффекты можно «объяснить» в рамках модели парного взаимодействия молекул.

«Объяснение» это проведем в форме решения задачи.

### Задача

1) Оцените диаметр  $D$  оловянных шариков, которые расплавятся при температуре  $t = 210^\circ\text{C}$ .

2) В какой последовательности будут пла-

вителься находящиеся в муфельной печи образцы из одного и того же металла в форме шариков, тонких длинных цилиндров (нитей) и фольги при повышении температуры? Диаметры шариков  $D_{ш}$ , цилиндров (нитей)  $D_{ц}$  и толщина фольги  $H$  равны между собой:  $D_{ш} = D_{ц} = H = D$ .

3) Рассчитайте температуры плавления оловянных нитей и фольги, с равными, как в предыдущем пункте, размерами, если оловянные шарики такого размера расплавились при температуре  $t = 207^\circ\text{C}$ .

4) Чему равно отношение энергии связи (глубины потенциальной ямы)  $ZU_0$  для одного атома (молекулы) олова к величине  $3kT/2$  – средней кинетической энергии теплового движения этого атома при температуре плавления олова?

Считайте, что абсолютная температура плавления пропорциональна теплоте плавления, проходящейся на один атом образца. Олово в твердом состоянии образует гранецентрированную кубическую решетку, т.е. у каждого атома внутри объема вещества имеется  $Z = 12$  ближайших соседей. Плотность олова в твердом состоянии  $7310 \text{ кг/м}^3$ , а плотность жидкого олова  $6973 \text{ кг/м}^3$ . Молярная теплота плавления олова  $7,2 \text{ кДж/моль}$ , температура плавления массивного образца олова  $t_0 = 232^\circ\text{C}$ .

### Решение

Плотность олова после плавления на 4,6% меньше, чем была до плавления. Это означает, что примерно на каждые 22 атома в кристаллической решетке в объеме вещества появилась одна вакансия, т.е. не занятое атомом место. Наличие такого большого числа вакансий приводит к тому, что атомы могут достаточно часто менять свои места, перескакивая на свободные соседние места-вакансии, и образец становится жидким.

Если плавится большой кусок олова, то на один моль, т.е. на  $N_A$  атомов ( $N_A$  – число Авогадро), требуется количество теплоты, равное

$$12N_A \frac{U_0}{2} \left(1 - \frac{21}{22}\right) = \frac{3}{11} N_A U_0 = 7,2 \text{ кДж}.$$

Известно, что

$$N_A \cdot kT = RT = 4,2 \text{ кДж}.$$

Отсюда можно найти отношение энергии связи к энергии теплового движения:

$$\frac{ZU_0}{(3/2)kT} = \frac{12 \cdot 11 \cdot 2 \cdot 7,2 \text{ кДж}}{3 \cdot 3 \cdot 4,2 \text{ кДж}} \approx 50.$$

Предположим, что выполняется соотношение  $D/d \gg 1$ , где  $d$  – диаметр атома. Объем шарика равен  $\pi D^3/6$ , площадь поверхности шарика равна  $\pi D^2$ . На каждый атом в твердом теле при

плотной упаковке (в гранецентрированной кубической решетке) приходится объем  $d^3/\sqrt{2}$ . Поэтому шарик состоит примерно из

$$\frac{\pi D^3/6}{d^3/\sqrt{2}} \approx 0,74 \left(\frac{D}{d}\right)^3$$

атомов. Для плавления такого количества атомов в составе большого куска олова требуется количество теплоты

$$Q_0 \approx \frac{3}{11} U_0 \cdot 0,74 \left(\frac{D}{d}\right)^3.$$

На плоской поверхности на один атом приходится площадь, равная  $d^2\sqrt{3}/4$ . Тогда на поверхности шарика находятся примерно

$$\frac{\pi D^2}{\sqrt{3}d^2/4} \approx 7,25 \left(\frac{D}{d}\right)^2$$

атомов. У этих атомов число ближайших соседей не 12, а 9, т.е.  $3/4$  от 12, и, соответственно, на них придется несколько меньшая теплота плавления

$$Q_1 \approx \frac{3}{11} U_0 \cdot \frac{3}{4} \cdot 7,25 \left(\frac{D}{d}\right)^2.$$

У всех оставшихся атомов, находящихся в объеме шарика, будет такая же удельная (на один атом) теплота плавления, поэтому

$$Q_2 \approx \frac{3}{11} U_0 \left(0,74 \left(\frac{D}{d}\right)^3 - 7,25 \left(\frac{D}{d}\right)^2\right).$$

Итоговое количество теплоты будет равно

$$Q_1 + Q_2 \approx Q_0 \left(1 - 2,45 \frac{d}{D}\right).$$

Поскольку в модели считается, что абсолютная температура плавления пропорциональна средней на один атом теплоте плавления и эта температура уменьшилась на 22 градуса, что составляет  $22/(232 + 273) \approx 0,0436$ , то это означает, что

$$2,45 \frac{d}{D} = 0,0436, \text{ или } \frac{D}{d} \approx 56,$$

что действительно много больше единицы.

Для определения абсолютных размеров шариков  $D$  оценим сначала размер атома олова:

$$d \sim \sqrt[3]{\frac{M}{\rho N_A}} \approx \sqrt[3]{\frac{119}{7 \cdot 6 \cdot 10^{23}}} \text{ см} \approx 3 \cdot 10^{-8} \text{ см} = 3 \text{ \AA}.$$

Отсюда следует

$$D \approx 56d \approx 17 \text{ нм}.$$

Заметим, что эксперимент дает понижение температуры на  $25^\circ\text{C}$  для шариков диаметром  $D_{\text{эсп}} = 20 \text{ нм}$ , так что наша теоретическая оценка

находится в хорошем согласии с экспериментальным значением.

Температура плавления  $T$  микроскопических образцов ниже температуры плавления  $T_0$  массивных образцов. Уменьшение температуры плавления для образцов микроскопических (точнее, наноскопических) размеров связано с уменьшением по сравнению с массивными образцами средней энергии связи атомов (уменьшением средней глубины потенциальной ямы, в которой живет одна молекула). Это происходит из-за увеличения доли поверхностных атомов (тех, которые находятся в потенциальных ямах меньшей глубины, чем атомы, окруженные соседями со всех сторон), т.е. атомов, обладающих избыточной по сравнению с объемными атомами энергией  $\Delta U$ . Если в поверхностном слое содержится  $\Delta N$  атомов, то теплота плавления понижается по сравнению с массивным образцом на величину избыточной энергии всех поверхностных атомов:

$$Q = Q_0 - \Delta Q_0 = Q_0 - \Delta U \Delta N.$$

Так как  $Q/N = \alpha T$  и  $Q_0/N = \alpha T_0$ , где  $\alpha$  – коэффициент пропорциональности, то температура плавления микроскопического образца, содержащего  $N$  атомов, оказывается ниже температуры плавления массивного образца:

$$T = T_0 - \frac{\Delta U}{\alpha} \frac{\Delta N}{N}.$$

Относительное понижение температуры составляет

$$\frac{\Delta T}{T_0} = \frac{T_0 - T}{T_0} = \frac{\Delta U}{\alpha T_0} \frac{\Delta N}{N}.$$

Таким образом, относительное понижение температуры плавления определяется относительной долей поверхностных атомов. Для образцов различной формы эти доли оказываются разными.

**Для шариков** доля атомов в поверхностном слое толщиной  $\delta$  равна

$$\frac{\Delta N_{\text{ш}}}{N_{\text{ш}}} = \frac{\Delta V_{\text{ш}}}{V_{\text{ш}}} = \frac{4\pi R^2 \delta}{(4/3)\pi R^3} = \frac{3\delta}{R} = \frac{6\delta}{D}.$$

Здесь учтено, что толщина поверхностного слоя  $\delta$  порядка размеров атомов, т.е. несколько ангстрем, и, соответственно,  $\delta \ll D$ . Относительное понижение температуры плавления шариков составит

$$\frac{\Delta T_{\text{ш}}}{T_0} = \frac{\Delta U}{\alpha T_0} \frac{6\delta}{D}.$$

**Для фольги** площадью  $S$  доля атомов в поверхностном слое толщиной  $\delta$  равна

$$\frac{\Delta N_{\text{ф}}}{N_{\text{ф}}} = \frac{\Delta V_{\text{ф}}}{V_{\text{ф}}} \approx \frac{2S\delta}{SH} = \frac{2\delta}{H} = \frac{2\delta}{D}.$$

Относительное понижение температуры плавления фольги будет равно

$$\frac{\Delta T_{\text{ф}}}{T_0} = \frac{\Delta U}{\alpha T_0} \frac{2\delta}{D}.$$

Значит,  $\Delta T_{\text{ш}}/\Delta T_{\text{ф}} = 3$  (это соотношение хорошо подтверждается экспериментально), или

$$\Delta T_{\text{ф}} = \frac{1}{3} \Delta T_{\text{ш}} \approx 8,3 \text{ } ^\circ\text{C}.$$

Тогда

$$t_{\text{ф}} = t_0 - \Delta T_{\text{ф}} \approx 223,7 \text{ } ^\circ\text{C},$$

т.е. фольга расплавится при более высокой температуре, чем шарики.

**Для образца цилиндрической формы** доля атомов в поверхностном слое толщиной  $\delta$  составляет

$$\frac{\Delta N_{\text{ц}}}{N_{\text{ц}}} = \frac{\Delta V_{\text{ц}}}{V_{\text{ц}}} = \frac{4\delta}{D}.$$

Соответственно, относительное понижение температуры плавления цилиндра будет равно

$$\frac{\Delta T_{\text{ц}}}{T_0} = \frac{\Delta U}{\alpha T_0} \frac{4\delta}{D}.$$

Тогда  $\Delta T_{\text{ш}}/\Delta T_{\text{ц}} = 3/2$  (это соотношение также хорошо подтверждается экспериментально), следовательно,

$$\Delta T_{\text{ц}} = \frac{2}{3} \Delta T_{\text{ш}} \approx 16,7 \text{ } ^\circ\text{C}.$$

Таким образом,

$$t_{\text{ц}} = t_0 - \Delta T_{\text{ц}} \approx 215,3 \text{ } ^\circ\text{C},$$

т.е. нити расплавятся при более высокой температуре, чем шарики, но при более низкой, чем фольга.

Итак, температуры плавления оловянных шариков, цилиндров и нитей расположились в следующем порядке:

$$t_{\text{ш}} < t_{\text{ц}} < t_{\text{ф}},$$

т.е. первыми при  $t_{\text{ш}} = 207 \text{ } ^\circ\text{C}$  начнут плавиться шарики, затем при температуре  $t_{\text{ц}} = 215,3 \text{ } ^\circ\text{C}$  расплавятся цилиндрические нити и, наконец, при самой высокой температуре  $t_{\text{ф}} = 223,7 \text{ } ^\circ\text{C}$  расплавится фольга.

# Задачи по математике и физике

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи нестандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечаются звездочкой. После формулировки задачи мы обычно указываем, кто нам ее предложил. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые.

Решения задач из этого номера следует отправлять по адресу: 119296 Москва, Ленинский проспект, 64-А, «Квант». Решения задач из разных номеров журнала или по разным предметам (математике и физике) присылайте в разных конвертах. На конверте в графе «Кому» напишите: «Задачник «Кванта» №2–2016» и номера задач, решения которых Вы посылаете, например «М2414» или «Ф2420». В графе «От кого» фамилию и имя просим писать разборчиво. В письмо вложите конверт с написанным на нем Вашим адресом и необходимый набор марок (в этом конверте Вы получите результаты проверки решений). Решения задач по математике и физике можно присылать также по электронным адресам: [math@kvant.ras.ru](mailto:math@kvant.ras.ru) и [phys@kvant.ras.ru](mailto:phys@kvant.ras.ru) соответственно.

Условия каждой оригинальной задачи, предлагаемой для публикации, присылайте в отдельном конверте в двух экземплярах вместе с Вашим решением этой задачи (на конверте пометьте: «Задачник «Кванта», новая задача по физике» или «Задачник «Кванта», новая задача по математике»).

В начале каждого письма просим указывать номер школы и класс, в котором Вы учитесь.

Задача М2418 предлагалась на региональном этапе XLII Всероссийской олимпиады школьников по математике, задача М2417 – на X Южном математическом турнире.

## Задачи М2414–М2420, Ф2420–Ф2427

**М2414.** В строку выписаны положительные числа. Известно, что каждое число, начиная со второго, равно полусумме среднего арифметического и среднего геометрического двух соседних с ним чисел. Найдите 333-е число, если известно, что первое число равно  $2/7$ , а 11-е число равно  $7/2$ .

С.Костин

**М2415.** На одной стороне прямого угла с вершиной  $A_0$  выбрана точка  $B$  такая, что  $A_0B = 4$ , а на другой стороне выбраны точки  $A_1, A_2, \dots$  так, что для любого

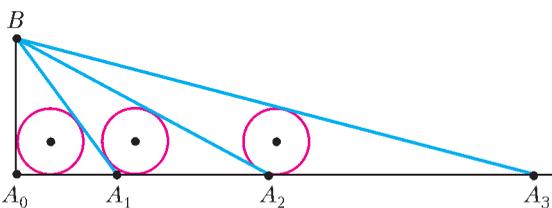


Рис. 1

$n = 1, 2, \dots$  радиус окружности, вписанной в треугольник  $BA_{n-1}A_n$ , равен 1 (рис. 1) Найдите длину отрезка  $A_0A_n$ .

В.Расторгуев

**М2416.** Для конечных множеств  $A$  и  $B$ , состоящих из нескольких положительных чисел, строится множество  $C$  всех чисел, представимых в виде  $ab$ , где  $a \in A$ ,  $b \in B$ . (Например, если  $A = \left\{\frac{1}{2}, 4, 6\right\}$ ,  $B = \left\{\frac{1}{3}, 4\right\}$ , то  $C = \left\{\frac{1}{6}, \frac{4}{3}, 2, 16, 24\right\}$ .) Могут ли все элементы множества  $C$ , выписанные в порядке возрастания, образовывать арифметическую прогрессию, если в каждом из множеств  $A, B$  хотя бы по два числа?

М.Иванов

**М2417.** В остроугольном неравностороннем треугольнике  $ABC$  продолжения высот  $AA_1$  и  $BB_1$  пересекают его описанную окружность в точках  $A_0$  и  $B_0$  соответственно. Прямая  $A_0B_0$  пересекает прямую  $AB$  в точке  $P$ . Пусть  $H$  – ортоцентр треугольника  $ABC$ ,  $K$  – центр описанной окружности треугольника  $ABH$ . Докажите, что  $PH \perp CK$ .

Н.Богачев

**М2418.** По кругу стоят  $n$  мальчиков и  $n$  девочек. Назовем пару из мальчика и девочки *хорошей*, если на одной из дуг между ними стоит поровну мальчиков и девочек (в частности, стоящие рядом мальчик и девочка образуют хорошую пару). Оказалось, что есть девочка, которая участвует ровно в 10 хороших парах. Докажите, что есть и мальчик, который участвует ровно в 10 хороших парах.

Н.Власова

**М2419.** В однокруговом футбольном турнире участвует  $n$  команд. За победу команда получает 3 очка, за ничью – 1 очко, за поражение – 0 очков. При каких натуральных  $d$  набранные командами очки могут образовывать арифметическую прогрессию с разностью  $d$ ?

А.Заславский

**М2420.** Дан тетраэдр. Для каждого его ребра возьмем плоскость, перпендикулярную этому ребру и проходящую через его середину. На сколько областей разобьют пространство шесть таких плоскостей?

П.Кожевников, И.Рубанов

**Ф2420.** Первую половину пути автобус ехал со скоростью в 8 раз большей, чем вторую. Средняя скорость автобуса на всем пути оказалась равной 16 км/ч. Найдите среднюю скорость автобуса за первую треть времени движения.

М.Замятнин

**Ф2421.** Маленький шарик массой  $m$ , закрепленный на легкой нерастяжимой нити длиной  $L$  под потолком, движется, оставаясь все время в одной и той же горизонтальной плоскости (конический маятник). Сила натяжения нити в  $N (>1)$  раз больше силы тяжести. Какова кинетическая энергия шарика?

С.Окс

**Ф2422.** Из четырех одинаковых однородных ледяных кирпичиков длиной  $L$  каждый сложена симметричная стопка (рис.2). На какое максимальное расстояние  $x$  можно выдвинуть правый кирпичик, чтобы стопка не развалилась? Кирпичики очень гладкие.

М.Замятнин

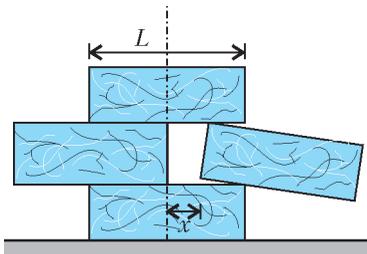


Рис. 2

**Ф2423.** В некоей лаборатории было получено новое вещество неполитропен с удельной теплоемкостью  $c$ , изменяющейся в зависимости от температуры  $t$  так, как показано на рисунке 3. Какая температура установится в калори-

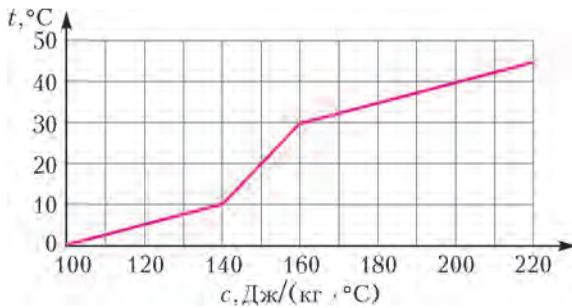


Рис. 3

метре, если в нем смешать равные массы неполитропена, взятые при температурах  $0\text{ }^\circ\text{C}$  и  $+40\text{ }^\circ\text{C}$ ? Удельная теплоемкость калориметра мала, потерями тепла можно пренебречь.

А.Бычков, М.Замятнин

**Ф2424.** В цилиндре под поршнем находится воздух. В стенках цилиндра есть два клапана: впускной  $K_1$  и выпускной  $K_2$  (рис. 4). Впускной клапан открывается, когда разность давлений воздуха снаружи и внутри цилиндра превышает  $\Delta_1 = 0,2p_0$ , где  $p_0$  – атмосферное давление. Выпускной клапан открывается, когда разность давлений внутри и снаружи превышает  $\Delta_2 = 0,4p_0$ . Поршень совершает очень медленные колебания так, что объем воздуха в цилиндре изменяется в пределах от  $V_0$  до  $2V_0$ . Температура снаружи и внутри цилиндра постоянна и равна  $T_0$ .

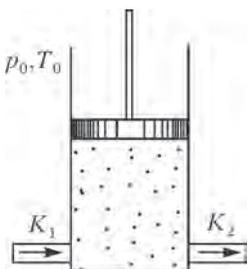


Рис. 4

1) Определите наименьшее и наибольшее количество воздуха в цилиндре при колебаниях поршня.

2) Изобразите в координатах  $p$ – $V$  процесс, происходящий с воздухом в цилиндре после того, как поршень уже совершил достаточно много колебаний. Ответьте на оба вопроса задачи, если  $\Delta_1 = 0,4p_0$ , а  $\Delta_2 = 0,2p_0$ .

М.Ромашка

**Ф2425.** Уединенный куб из непроводящего материала заряжен равномерно по объему. Вершины (углы) куба имеют одинаковые потенциалы  $\phi$ . Векторы напряженности электрического поля вблизи вершин куба (вне объема куба) имеют одинаковые величины  $E$ . Каков потенциал точки в самом центре куба?

Куб распилили на 8 равных частей тремя взаимно перпендикулярными плоскими разрезами (на 8 одинаковых кубиков) и одну из частей удалили. Каким будет потенциал той же точки в центре (бывшего) куба? Каким будет по величине вектор напряженности электрического поля в этой же точке?

С.Варламов

**Ф2426\*.** Радиус кольца из тонкой проволоки с равномерно распределенной по его длине массой равен  $R = 1$  м. По кольцу течет постоянный ток  $I = 100$  А. Это кольцо расположилось неподвижно на высоте  $h = 3$  мм над большой плоской горизонтальной поверхностью из сверхпроводника. Какова масса кольца  $m$ ?

С.Кольцов

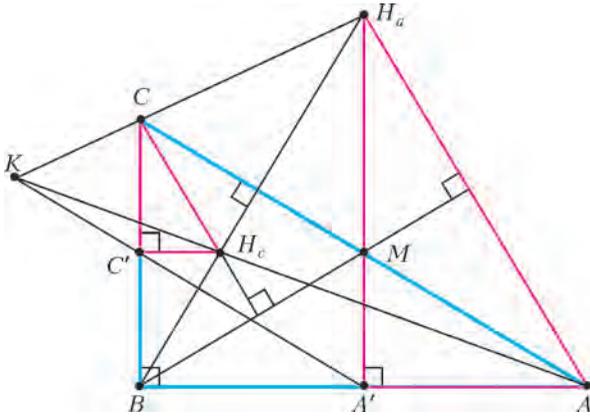
**Ф2427\*.** Понижающий идеальный трансформатор подключен к сети (220 В, 50 Гц) и имеет коэффициент трансформации напряжения 3:1. Если к вторичной обмотке подключен резистор сопротивлением  $R$ , то в первичной обмотке течет ток 0,3 А. При подключении к вторичной обмотке еще одного такого же резистора ток в первичной обмотке стал 0,5А. Каково сопротивление этого резистора? Каким будет ток в первичной обмотке, если оба резистора отключить? Какой по емкости конденсатор нужно подключить к вторичной обмотке, чтобы входной ток трансформатора стал равным нулю?

С.Дмитриев

### Решения задач М2396–М2404, Ф2403–Ф2412

**М2396.** В неравностороннем прямоугольном треугольнике  $ABC$  точка  $M$  – середина гипотенузы  $AC$ , а точки  $H_a$  и  $H_c$  – ортоцентры треугольников  $ABM$  и  $CBM$  соответственно. Докажите, что прямые  $AH_c$  и  $CH_a$  пересекаются на прямой, проходящей через середины катетов треугольника  $ABC$ .

Пусть  $A'$  и  $C'$  – середины катетов  $AB$  и  $BC$  соответственно. Так как треугольники  $AMB$  и  $CBM$  равнобедренные, то их высоты из точки  $M$  проходят через точки  $A'$  и  $C'$  соответственно. Тогда  $AA' \perp BC$ ,  $BC \perp H_cC'$ , значит,  $AA' \parallel H_cC'$ . Аналогично,  $A'H_a \parallel C'C$ . Кроме того,  $AH_a \parallel H_cC$  (обе эти прямые перпендикулярны  $BM$ ). Итак, соответственные стороны треугольников  $AA'H_a$  и  $H_cC'C$  параллельны (см. рисунок), т.е. эти треугольники гомотетичны, поэтому прямые  $AH_c$ ,



$H_aC$  и  $A'C'$  пересекаются в одной точке – центре гомотетии  $k$ .

Д.Швецов

**M2397.** Существует ли бесконечная последовательность натуральных чисел такая, что для любого натурального  $k$  сумма любых  $k$  идущих подряд членов этой последовательности делится на  $k + 1$ ?

**Ответ:** не существует.

Предположим, что нашлась такая последовательность  $a_1, a_2, a_3, \dots$

Пусть  $k$  – любое натуральное число, большее 1. Рассмотрим первые  $2k - 1$  членов последовательности  $a_1, a_2, \dots, a_{2k-1}$ . По нашему предположению, сумма  $a_1 + a_2 + \dots + a_{2k-1}$  делится на  $2k$ , а каждая из сумм  $a_2 + a_3 + \dots + a_k$  и  $a_{k+1} + a_{k+2} + \dots + a_{2k-1}$  делится на  $k$ . Таким образом, получаем, что  $a_1$  делится на  $k$  при всех  $k$ . Это невозможно.

С.Берлов

**M2398.** Поле представляет собой клетчатый квадрат  $41 \times 41$ , в одной из клеток которого замаскирован танк. Истребитель за один выстрел обстреливает одну клетку. Если произошло попадание, танк переползает на соседнюю по стороне клетку поля, если нет – остается на месте. При этом после выстрела пилот истребителя не знает, произошло ли попадание. Для уничтожения танка надо попасть в него два раза. Каким наименьшим числом выстрелов можно наверняка уничтожить танк?

**Ответ:**  $\frac{3 \cdot 41^2 - 1}{2} = 2521$  выстрел.

Окрасим клетки в шахматном порядке так, чтобы углы поля были черными. Пусть пилот сначала выстрелит по всем белым полям, затем по всем черным, а затем снова по всем белым. Если танк был на белом поле, то пилот его подобьет в первой и второй сериях; если же на черном – то во второй и в третьей сериях. При этом пилот совершит  $41^2 + \frac{41^2 - 1}{2} = \frac{3 \cdot 41^2 - 1}{2}$  выстрелов.

Осталось показать, что меньшим числом выстрелов не обойтись. Пусть у пилота есть последовательность выстрелов, после которой танк будет гарантированно уничтожен. Ясно, что по любой клетке он должен выстрелить хотя бы раз (иначе танк в этой клетке не будет уничтожен).

Предположим, что есть две соседних клетки  $A$  и  $B$ , по которым он стрелял ровно по разу, причем выстрел по  $B$  произошел позже. Тогда, если танк изначально находился в  $B$ , он мог после выстрела по  $B$  переползти в  $A$ , и второго попадания не произошло бы. Это невозможно; значит, таких пар клеток нет.

Разобьем теперь всю доску на  $\frac{41^2 - 1}{2}$  прямоугольников  $1 \times 2$  и одну клетку. По доказанному, в каждый прямоугольник истребитель должен сделать как минимум три выстрела, а в оставшуюся клетку – хотя бы один выстрел. Итого, он сделал не менее чем  $3 \cdot \frac{41^2 - 1}{2} + 1 = \frac{3 \cdot 41^2 - 1}{2}$  выстрелов.

С.Берлов, А.Магазинов

**M2399.** Действительные числа  $a, b, c, d$ , по модулю большие единицы, удовлетворяют соотношению

$$abc + abd + acd + bcd + a + b + c + d = 0.$$

Докажите, что

$$\frac{1}{a-1} + \frac{1}{b-1} + \frac{1}{c-1} + \frac{1}{d-1} > 0.$$

Обозначим  $x = \frac{a+1}{a-1}$ ,  $y = \frac{b+1}{b-1}$ ,  $z = \frac{c+1}{c-1}$ ,  $t = \frac{d+1}{d-1}$ .

Поскольку модули чисел  $a, b, c, d$  больше единицы, числа  $x, y, z, t$  положительны (и не равны 1).

Данное соотношение переписывается в виде

$$(a+1)(b+1)(c+1)(d+1) = (a-1)(b-1)(c-1)(d-1),$$

или  $xyzt = 1$ . Из равенства  $\frac{1}{a-1} = \frac{x-1}{2}$  и аналогичных получаем, что

$$\frac{1}{a-1} + \frac{1}{b-1} + \frac{1}{c-1} + \frac{1}{d-1} = \frac{x+y+z+t-4}{2}.$$

Таким образом, нам надо доказать, что  $x+y+z+t > 4$ .

Поскольку  $xyzt = 1$ , но числа  $x, y, z, t$  отличны от единицы, среди них есть различные. Тогда по неравенству о средних получаем

$$x+y+z+t > 4\sqrt[4]{xyzt} = 4,$$

что и требовалось.

К.Иванов

**M2400.** Назовем натуральное число почти квадратом, если оно равно произведению двух последовательных натуральных чисел. Назовем натуральное число представимым, если его можно представить в виде частного двух почти квадратов. Докажите, что:

а) каждый почти квадрат представим;

б) числа вида  $4(2k+1)^2$  ( $k$  – натуральное) представимы;

в) любое натуральное число, не являющееся точным квадратом, представимо;

г) числа вида  $p^{2s}$ , где  $p$  – простое,  $s$  – натуральное, не представимы.

а) Следует из равенства

$$n(n+1) = \frac{n(n+2)(n+1)^2}{(n+1)(n+2)} = \frac{(n^2+2n)(n^2+2n+1)}{(n+1)(n+2)}.$$

б) Пусть  $m = 4k(k+1)$ , тогда имеем

$$\frac{m(m+1)}{k(k+1)} = \frac{4k(k+1)(4k^2+4k+1)}{k(k+1)} = 4(2k+1)^2.$$

в) Пусть  $d$  – данное натуральное число, не являющееся точным квадратом. Преобразуем равенство:

$$d = \frac{n(n+1)}{k(k+1)} = \frac{4n(n+1)}{4k(k+1)} = \frac{(2n+1)^2 - 1}{(2k+1)^2 - 1}.$$

Положим  $y = 2n + 1$ ,  $x = 2k + 1$ . Имеем уравнение  $y^2 - 1 = d(x^2 - 1)$ , или  $y^2 - dx^2 = 1 - d$ , у которого мы хотим отыскать решение в нечетных числах, больших 1.

Как известно (см., например, статью А. Спивака «Уравнения Пелля» в «Кванте» №6 за 2002 г.), уравнение  $y^2 - dx^2 = 1$  имеет решение в натуральных числах, т.е. можно выбрать натуральные  $a, b$  такие, что  $a^2 - db^2 = 1$ . Докажем, что такие  $a$  и  $b$  можно выбрать с дополнительным условием:  $a$  – нечетно,  $b$  – четно.

Перемножив равенство  $a^2 - db^2 = 1$  на себя, получим  $(a^2 + db^2)^2 - d(2ab)^2 = 1$ . Это означает, что вместе с парой  $a, b$  уравнению удовлетворяет пара  $a_1 = a^2 + db^2$ ,  $b_1 = 2ab$ . Рассмотрим два случая. Если  $d$  четно, то  $a_1$  нечетно,  $b_1$  четно. Пусть  $d$  нечетно, тогда  $a$  и  $b$  разной четности. Если  $a$  нечетно, то нас устраивает пара  $a, b$ , иначе  $a_1$  нечетно,  $b_1$  четно и подходит пара  $a_1, b_1$ .

Итак, пусть нечетное  $a$  и четное  $b$  таковы, что  $a^2 - db^2 = 1$ . Домножив это равенство на  $1 - d$ , имеем  $a^2 - da^2 - db^2 + d^2b^2 = 1 - d$ , или  $(a + db)^2 - d(a + b)^2 = 1 - d$ , значит,  $x = a + b$  и  $y = a + db$  и есть подходящие нам нечетные числа, большие 1.

г) **Лемма.** *Натуральные числа  $a, x > 1$  и  $y > 1$  таковы, что  $y^2 - 1 = a^2(x^2 - 1)$ . Тогда  $a \geq 2x$ .*

**Доказательство.** Перепишем условие задачи в виде  $y^2 = a^2x^2 - a^2 + 1$ . Заметим, что  $y < ax$ , поскольку правая часть равенства меньше  $(ax)^2$ . Но  $y$  и  $ax$  – целые числа, поэтому  $y \leq ax - 1$ . Следовательно,

$$a^2x^2 - a^2 + 1 = y^2 \leq (ax - 1)^2 = a^2x^2 - 2ax + 1.$$

Стало быть,  $2ax \leq a^2$ , т.е.  $a \geq 2x$ . Лемма доказана.

Предположим, что  $p^{2s}$  представимо, т.е.  $p^{2s} = \frac{n(n+1)}{k(k+1)}$ .

Введем обозначения аналогично пункту в):  $y = 2n + 1$ ,  $x = 2k + 1$ ,  $a = p^s$ . Имеем  $y^2 - 1 = a^2(x^2 - 1)$ , или  $(y-1)(y+1) = a^2(x^2 - 1)$ .

Если  $p \geq 3$ , то на  $a^2 = p^{2s}$  делится ровно один из множителей  $y - 1$ ,  $y + 1$ . Тогда другой множитель – делитель выражения  $x^2 - 1$ . Имеем

$$a^2 \leq y + 1 \leq (y - 1) + 2 \leq (x^2 - 1) + 2 = x^2 + 1.$$

С другой стороны, из леммы получаем  $a \geq 2x$ , откуда  $4x^2 \leq x^2 + 1$  – противоречие.

Пусть  $p = 2$ ,  $s > 1$ . Тогда один из множителей  $y - 1$ ,  $y + 1$  делится на  $2^{2s-1}$ , а другой делится на 2, но не делится на 4. Значит, этот второй множитель – делитель выражения  $2(x^2 - 1)$ , а так как  $x^2 - 1$  четно, то даже делитель выражения  $x^2 - 1$ . Имеем

$$2^{2s-1} \leq y + 1 \leq (y - 1) + 2 \leq (x^2 - 1) + 2 = x^2 + 1.$$

С другой стороны, из леммы получаем  $2^s = a \geq 2x$ , откуда  $2x^2 \leq 2^{2s-1} \leq x^2 + 1$  – противоречие.

Наконец, при  $p = 2$ ,  $s = 1$  имеем  $(y-1)(y+1) = (2x-2)(2x+2)$ . При  $y \leq 2x-1$  левая часть меньше правой, при  $y \geq 2x+1$  левая часть больше правой. Оставшийся случай  $y = 2x$  приводит к равенству  $1 = 4$ . Противоречие.

**Замечания.** Лемма из пункта г) практически повторяет следующую задачу (задача 3 для 9 класса заключительного этапа Всероссийской олимпиады 2015 г.):

*Натуральные числа  $a, x$  и  $y$ , большие 100, таковы, что  $y^2 - 1 = a^2(x^2 - 1)$ . Какое наименьшее значение может принимать дробь  $a/x$ ?*

Действительно, из леммы следует, что  $a/x \geq 2$ . Эта оценка достигается при любом  $x > 100$ , если положить  $a = 2x$ ,  $y = ax - 1 = 2x^2 - 1$ .

После решения задачи M2400 остается вопрос о представимости чисел вида  $a^2$ : (1) для нечетного  $a$  и (2) для  $a$ , кратного 4. Здесь для разных  $a$  ответы могут быть разными.

(1) Например, если  $a = 15$ , то, согласно лемме, уравнение  $y^2 - 1 = 15^2(x^2 - 1)$  может иметь решения только при  $x < 15/2$ . Остается перебрать такие нечетные  $x$ : 3, 5, 7. Во всех этих случаях  $15^2(x^2 - 1) + 1$  не является точным квадратом. Значит,  $15^2$  непроставимо.

С другой стороны,  $35^2$  или  $99^2$  представимы:

$$35^2 = \frac{49 \cdot 50}{1 \cdot 2}, \quad 99^2 = \frac{242 \cdot 243}{2 \cdot 3}.$$

(В последнем примере более «сложный» знаменатель  $2 \cdot 3$ . Вообще, уравнение

$x^2 = \frac{y(y+1)}{n(n+1)}$  имеет бесконечно много решений в натуральных  $x, y$  при фиксированном  $n$ .)

(2) Скажем,  $12^2$  – непроставимо, как и любое число вида  $a^2$ , где  $a = 4t$ , а оба числа  $a + 1$  и  $a - 1$  простые. Действительно, преобразуем уравнение  $y^2 - 1 = a^2(x^2 - 1)$  к виду  $(a-1)(a+1) = (ax-y)(ax+y)$ . Так как  $a + 1$  и  $a - 1$  – простые, возможны два случая: 1)  $ax - y = a - 1$ ,  $ax + y = a + 1$ , откуда  $x = y = 1$  – не подходит; 2)  $ax - y = 1$ ,  $ax + y = a^2 - 1$ , откуда  $x = \frac{a}{2}$  – четное число – тоже не подходит. (Проведенное рассуждение показывает, как можно придумать пример в пункте б).)

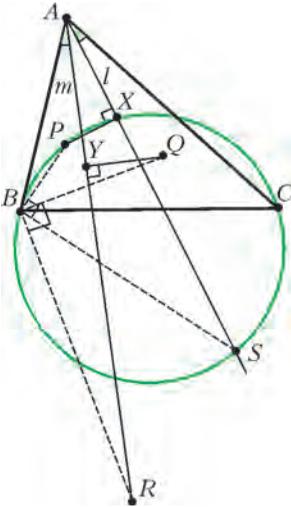
$$\text{Однако } (12 \cdot 17)^2 \text{ представимо: } (12 \cdot 17)^2 = \frac{288 \cdot 289}{1 \cdot 2}.$$

В. Сендеров

**M2401.** Точки  $P$  и  $Q$ , лежащие внутри треугольника  $ABC$ , таковы, что  $\angle PAB = \angle QAC$ ,  $\angle PBC = \angle QBA$ ,  $\angle PCA = \angle QCB$  (т.е. точки  $P$  и  $Q$  изогонально сопря-

жены). Прямые  $l$  и  $m$  проходят через точку  $A$  и симметричны относительно биссектрисы угла  $A$ . Пусть  $X$  – проекция точки  $P$  на прямую  $l$ , а  $Y$  – проекция точки  $Q$  на прямую  $m$ . Докажите, что если точки  $B, C, P, X$  лежат на одной окружности, то точки  $B, C, Q, Y$  тоже лежат на одной окружности.

Пусть  $l$  вторично пересекает окружность  $BSPX$  в точке  $S$  (см. рисунок). Так как  $PX \perp XS$ , то  $S$  диаметрально



противоположна  $P$ , значит,  $PB \perp SB$  и  $PC \perp SC$ . Пусть  $R$  изогонально сопряжена точке  $S$  (об изогональном сопряжении написано, например, в недавней статье П. Кожевникова «Изогонально сопряженные точки», см. «Квант» №1). Тогда  $R$  лежит на прямой  $m$ . Прямые  $BQ$  и  $BP$  симметричны относительно биссектрисы угла  $B$ , то же справедливо и для прямых  $BS$  и  $BR$ . Так как  $PB \perp SB$ , то  $QB \perp RB$ . Аналогично доказываем, что  $QC \perp RC$ , поэтому  $R$  – точка, диаметрально противоположная

точке  $Q$  в окружности  $BQC$ . Так как  $OY \perp RY$ , точка  $Y$  также лежит на этой окружности, откуда следует утверждение задачи.

**Замечание.** При решении задачи помогло рассмотренное диаметрально противоположных точек. О применении этой идеи было рассказано в статье Е. Бакаева, П. Кожевникова и И. Яковлева «Перпендикуляры и еще один признак вписанного четырехугольника» в «Кванте» №5–6 за 2015 год. В этой же статье появлялись частные случаи нашей конструкции: проекция ортоцентра на медиану и проекция центра описанной окружности на симедиану.

П. Кожевников

**M2402.** На доске написаны  $N \geq 9$  различных неотрицательных чисел, меньших единицы. Оказалось, что для любых восьми различных чисел с доски на ней найдется девятое, отличное от них, такое, что сумма этих девяти чисел целая. При каких  $N$  это возможно?

**Ответ:** только при  $N = 9$ .

Ясно, что при  $N = 9$  требуемое возможно – достаточно написать на доске 9 различных положительных чисел с единичной суммой. Покажем, что при  $N > 9$  требуемое невозможно. Предположим противное; обозначим через  $S$  сумму всех чисел на доске.

Выберем на доске произвольные числа  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_7$  с суммой  $T$ ; пусть  $A$  – множество всех остальных чисел на доске. По условию, для любого числа  $\beta \in A$  найдется такое отличное от него число  $\gamma \in A$ , что число  $T + \beta + \gamma$  целое. Скажем, что число  $\gamma$  соответствует числу  $\beta$ . Заметим, что такое число  $\gamma$  единственно. Действительно, если бы нашлось другое число  $\gamma' \in A$ , для которого сумма  $T + \beta + \gamma'$  целая, то число

$\gamma - \gamma' = (T + \beta + \gamma) - (T + \beta + \gamma')$  также было бы целым; это невозможно, ибо  $0 < |\gamma - \gamma'| < 1$ .

В частности, отсюда следует, что  $\beta$  соответствует числу  $\gamma$ . Значит, все числа в  $A$  разбиваются на пары чисел  $(\beta_1, \gamma_1), \dots, (\beta_l, \gamma_l)$ , соответствующих друг другу. При этом  $l > 1$ , так как  $N = 7 + 2l > 9$ .

Рассмотрим теперь сумму

$$\Sigma = (T + \beta_1 + \gamma_1) + (T + \beta_2 + \gamma_2) + \dots + (T + \beta_l + \gamma_l).$$

Тогда  $\Sigma$  – целое число. С другой стороны, каждое число из  $A$  входит в  $\Sigma$  ровно по разу; значит,

$$\Sigma = lT + (S - T) = S + (l - 1)T, \text{ откуда } T = \frac{\Sigma - S}{l - 1}.$$

Выбрав теперь на доске числа  $\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \dots, \alpha_8$  и обозначая их сумму через  $T'$ , аналогично получаем,

что  $T' = \frac{\Sigma' - S}{l - 1}$  при целом  $\Sigma'$ . Значит,

$$\alpha_1 - \alpha_8 = \frac{\Sigma - S}{l - 1} - \frac{\Sigma' - S}{l - 1} = \frac{\Sigma - \Sigma'}{l - 1}.$$

Так как  $\alpha_1$  и  $\alpha_8$  могли быть любыми двумя числами на доске, получаем, что разность любых двух чисел на доске имеет вид  $\frac{k}{l - 1}$  при целом  $k$ .

Пусть теперь  $\mu$  – наименьшее число на доске. Тогда на доске могут присутствовать лишь числа  $\mu, \mu + \frac{1}{l - 1}, \dots, \mu + \frac{l - 2}{l - 1}$  (все большие числа будут уже не меньше 1) – всего  $l$  чисел. Однако общее количество чисел на доске равно  $N = 7 + 2l > l$ ; значит, они не могут быть различными. Противоречие.

Ф. Нилов

**M2403.** Дано натуральное число  $N \geq 3$ . Назовем набор из  $N$  точек на координатной плоскости допустимым, если их абсциссы различны и каждая из этих точек окрашена либо в красный, либо в синий цвет. Будем говорить, что многочлен  $P(x)$  разделяет допустимый набор точек, если либо выше графика  $P(x)$  нет красных точек, а ниже – нет синих, либо наоборот (на самом графике могут лежать точки обоих цветов). При каком наименьшем  $k$  любой допустимый набор из  $N$  точек можно разделить многочленом степени не более  $k$ ?

**Ответ:**  $k = N - 2$ .

Докажем, что  $k = N - 2$  подходит. Возьмем произвольные  $N - 1$  из данных  $N$  точек; существует многочлен степени не большей  $N - 2$ , график которого проходит через них. Этот многочлен, очевидно, разделяет наши точки.

Осталось построить пример допустимого набора, который нельзя разделить многочленом степени меньшей  $N - 2$ . Возьмем график некоторого приведенного многочлена  $f(x)$  степени  $N - 2$  и расположим на нем  $N$  точек, чередуя цвета. Предположим, что некоторый многочлен  $P(x)$ , степень которого не больше  $N - 3$ , разделяет эти точки; можно считать, что ниже графика  $P(x)$  нет красных точек, а выше – синих.

Обозначим  $Q(x) = f(x) - P(x)$ ; степень многочлена  $Q(x)$  равна  $N - 2 \geq 1$ . Кроме того, если  $r$  и  $b$  –

абсциссы произвольных красной и синей точек, то  $P(r) \leq f(r)$  и  $P(b) \geq f(b)$ , т.е.  $Q(r) \geq 0$  и  $Q(b) \leq 0$ . Заметим, что если  $Q(s) \leq Q(t)$  при некоторых  $s < t$ , то существует такая точка  $u \in (s, t)$ , для которой  $Q'(u) > 0$  (здесь использовано, что  $Q(x)$  непостоянен). Это значит, что на любом интервале между красной и синей точками (красная левее синей) найдется точка, в которой значение  $Q'(x)$  положительно. Аналогично, на любом интервале между синей и красной точками найдется точка, в которой значение  $Q'(x)$  отрицательно. Итого, мы нашли  $N - 1$  точку, в которых  $Q'(x)$  принимает значения чередующихся знаков. Между любыми такими соседними точками  $Q'(x)$  имеет корень. Следовательно, у многочлена  $Q'(x)$  не менее  $N - 2$  корней. Но это невозможно, так как  $Q'(x)$  – многочлен степени  $N - 3$ . Противоречие.

К.Тыщук

**M2404.** У нумизмата есть 100 одинаковых по внешнему виду монет. Он знает, что среди них 30 настоящих и 70 фальшивых монет. Кроме того, он знает, что массы всех настоящих монет одинаковы, а массы всех фальшивых – разные, причем любая фальшивая монета тяжелее настоящей; однако точные массы монет неизвестны. Имеются двухчашечные весы без гирь, на которых можно за одно взвешивание сравнить массы двух групп, состоящих из одинакового числа монет. За какое наименьшее количество взвешиваний на этих весах нумизмат сможет гарантированно найти хотя бы одну настоящую монету?

**Ответ:** за 70 взвешиваний.

1. Покажем, что за 70 взвешиваний нумизмат сможет найти настоящую монету. Сложим все 100 монет в кучу. Каждым взвешиванием он будет выбирать две монеты из кучи и сравнивать их. Если их массы равны, то обе монеты настоящие, и требуемая монета найдена. Если же нет, то более тяжелая монета – фальшивая, и ее можно выбросить из кучи.

Через 70 таких взвешиваний, если равенства никогда не будет, то в куче останется 30 монет, причем все настоящие останутся в куче. Значит, в этом случае нумизмат даже найдет все 30 настоящих монет.

2. Предположим теперь, что у нумизмата есть алгоритм, позволяющий гарантированно найти настоящую монету не более чем за 69 взвешиваний. Мы покажем, что это невозможно – даже в предположении, что массы монет таковы: масса настоящей равна  $2^{100}$ , а масса  $i$ -й фальшивой равна  $m_i = 2^{100} + 2^i$ .

При таком предположении результат любого взвешивания можно определить так. Пусть при некотором взвешивании на чашках по  $k$  монет, среди которых  $d > 0$  фальшивые, имеющие номера  $i_1 < i_2 < \dots < i_d$ . Тогда на чашке, на которой лежит самая тяжелая монета, суммарная масса не меньше  $k \cdot 2^{100} + 2^{i_d}$ , а суммарная масса на другой чашке не больше  $k \cdot 2^{100} + (2^1 + \dots + 2^{i_d-1}) = k \cdot 2^{100} + 2^{i_d} - 1$ . Значит, если на чашках есть хотя бы одна фальшивая монета, то

перевесит чашка, на которой лежит фальшивая с наибольшим номером.

Итак, пусть нумизмат действует по своему алгоритму. Мы будем сообщать ему результаты взвешиваний и присваивать некоторым монетам массы  $m_i$ . При этом после каждого взвешивания присвоенными окажутся массы  $m_{70}, m_{69}, \dots, m_{70-i}$  при некотором  $i$ . Далее, если соответствующие монеты действительно имеют такие массы (а остальные массы распределены как угодно), то результаты взвешиваний будут такими, как мы сообщили.

При первом взвешивании выберем любую монету на чашках, присвоим ей массу  $m_{70}$  и сообщим, что чашка с ней тяжелее. При каждом следующем взвешивании, если на весах уже присутствует монета с присвоенной массой, то мы просто выберем из таких масс наибольшую и сообщим, что чашка с соответствующей монетой перевесила. Если же никакой монете на весах масса еще не присвоена, то мы опять выберем любую монету на чашках, присвоим ей наибольшую еще не присвоенную массу и сообщим, что чашка с ней тяжелее. Нетрудно видеть, что при этом требуемые условия соблюдаются. Если нумизмат совершил не более 69 взвешиваний, то не более 69 масс окажутся присвоенными. В частности,  $m_1$  присвоенной не будет. Значит, массу  $m_1$  может иметь любая монета, которой масса еще не присвоена, и при этом все результаты взвешиваний останутся такими, как мы сообщили. Поэтому нумизмат не сможет указать на заведомо настоящую монету.

*Замечание.* Ответ в задаче не изменится, если убрать условие равенства количеств монет на чашках.

С.Берлов, И.Богданов

**F2403.** Внутри Земли имеется ядро радиусом  $r = 3,5$  тыс. км, которое гораздо плотнее земной коры. Поэтому ускорение свободного падения внутри Земли начиная от ее центра сначала линейно растет до границы ядра, а затем изменяется мало, оставаясь почти постоянным (и равным  $g = 10$  м/с<sup>2</sup>) вплоть до поверхности Земли (радиус Земли  $R = 6370$  км). Если бы Алиса, жившая в Стране Чудес, упала в пустую дырку, проходящую через середину Земли, то через какое время она вернулась бы обратно к месту падения? С какой скоростью Алиса пролетала бы через центр Земли?

Логично разбить весь путь Алисы от старта до финиша (в том же месте) на несколько этапов, на каждом из которых движение описывается известными формулами. С момента попадания в дырку до границы ядра Алиса, двигаясь равноускорено, летела время

$$t_1 = \sqrt{\frac{2(R-r)}{g}} = 535,7 \text{ с.}$$

Участков движения с такими же промежутками времени всего четыре. За время  $t_1$  Алиса приобрела скорость

$$v_1 = \sqrt{2(R-r)g} = 7,576 \text{ км/с.}$$

Находясь внутри ядра Земли, Алиса движется в гравитационном поле, величина которого линейно меняется

от нуля в центре до  $g$  на границе ядра. На этом участке скорость Алисы вырастает от  $v_1$  на границе до  $v_{ц}$  в центре. Связь между  $v_1$  и  $v_{ц}$  устанавливается законом изменения механической энергии тела:

$$\frac{Mv_{ц}^2}{2} = \frac{Mv_1^2}{2} + Mg\frac{r}{2},$$

откуда находим

$$v_{ц} = \sqrt{(2R-r)g} = 9,6125 \text{ км/с} \approx 9,6 \text{ км/с}.$$

Закон движения Алисы внутри ядра Земли, т.е. второй закон Ньютона, имеет вид

$$M \frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{Mg}{r}x.$$

Это уравнение колебаний, угловая частота которых  $\omega = \sqrt{g/r}$ . Если движение от границы до центра Земли заняло время  $t_2$ , то участков с таким же временем движения тоже четыре. В частности, такое же время занимает путь от центра Земли до границы ядра. Если скорость в центре равна  $v_{ц}$ , то, пока Алиса движется внутри ядра, ее скорость изменяется со временем по закону

$$v(t) = v_{ц} \cos \omega t.$$

Следовательно, скорость  $v_1$  на границе ядра будет достигнута через время

$$t_2 = \arccos \frac{v_1/v_{ц}}{\omega} = \arccos \sqrt{\frac{2(R-r)r}{(2R-r)g}} = 591,6 \text{ с}.$$

Все время путешествия Алисы «туда и обратно» составляет

$$t_{\text{общ}} = 4(t_1 + t_2) \approx 4509 \text{ с} \approx 1 \text{ ч } 15 \text{ мин}.$$

А. Чудесова

**Ф2404.** Ранним утром 4 апреля 2004 года (04-04-04) два полярника одновременно стартовали из своего лагеря ровно в 4 часа (по Московскому времени). Один шел со скоростью 4 км/ч так, что все время наступал на свою собственную тень (шел строго «от солнца»), другой двигался строго на восток со скоростью тоже 4 км/ч. Через 4 часа они встретились (столкнулись). Какими были географические координаты полярного лагеря? На какое максимальное расстояние удалялись полярники друг от друга в течение этих четырех часов?

Из условия следует, что эта история происходила в северном полушарии, поскольку в апреле освещен Солнцем именно северный полюс Земли. В это время высота Солнца над горизонтом мала, и можно считать, что Солнце все время находится вблизи горизонта. Тогда получается, что первый полярник двигался по окружности, радиус которой  $R$  можно найти из соотношения

$$\frac{2\pi R}{24 \text{ ч}} = 4 \text{ км/ч}, \text{ откуда } R \approx 15,28 \text{ км}.$$

Если считать полярников материальными точками, то столкнуться они могли только в том случае, если оба двигались по дугам окружностей с одинаковыми радиусами. В этом случае расстояние от точки старта до

места встречи равно как раз радиусу каждой из этих окружностей. Из того что они встретились ровно через 4 часа, следует, что расстояние от лагеря полярников до северного полюса тоже равно этому радиусу. В четыре часа утра Солнце светило так, что в лагере тень полярника составляла с направлением «точно на северный полюс» угол  $120^\circ - 90^\circ = 30^\circ$ . Значит, «полдень» в полярном лагере, когда солнце светило точно на север, приходится на момент времени

$$t = 4 \text{ ч} - 24 \text{ ч} \frac{30^\circ}{360^\circ} = 2 \text{ ч}$$

по Московскому времени. Время в Москве опережает время в Лондоне (время по Гринвичу) на 3 часа, следовательно, лагерь полярников имел восточную долготу  $\lambda = 360^\circ \cdot (5 \text{ ч}/24 \text{ ч}) = 75^\circ$ . А северная широта  $\varphi$  лагеря меньше  $90^\circ$  всего на  $0,137^\circ$  (или на  $8,23'$ ). Максимальное расстояние  $x$  между полярниками можно найти из соотношения

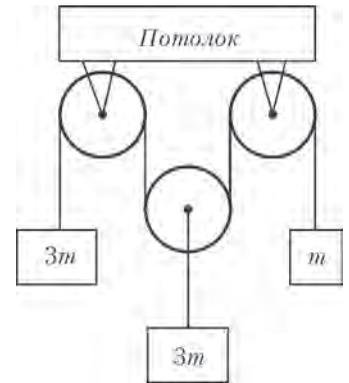
$$2R - x = R\sqrt{3},$$

откуда

$$x = R(2 - \sqrt{3}) \approx 4094 \text{ м} \approx 4 \text{ км}.$$

К. Вантов

**Ф2405.** В механической системе, изображенной на рисунке, трение в осях блоков отсутствует, шкивы блоков невесомые, нити невесомые и нерастяжимые. Не лежащие на шкивах участки нитей вертикальны. С какими ускорениями движутся грузы?



По условию задачи все блоки и нити невесомые и трения в осях блоков нет, поэтому на всех свободных участках нитей натяжение одинаковое. Обозначим силу натяжения верхней нити через  $F$ . Выберем положительное направление вертикальной оси координат совпадающим с направлением ускорения свободного падения, т.е. вниз, а начало координат возьмем на уровне расположения неподвижных осей верхних блоков. Обозначим координаты крайних грузов с массами  $m$  и  $3m$  через  $x_1$  и  $x_3$ , а координату подвижной оси нижнего блока — через  $x_2$ . Так как нить нерастяжима, выполняется соотношение

$$x_1 + 2x_2 + x_3 = \text{const}.$$

Для каждого из грузов запишем уравнение движения (в соответствии со вторым законом Ньютона):

$$m \frac{d^2x_1}{dt^2} = mg - F,$$

$$3m \frac{d^2x_2}{dt^2} = 3mg - 2F,$$

$$3m \frac{d^2x_3}{dt^2} = 3mg - F.$$

Отсюда с учетом условия кинематической связи получаем

$$g - \frac{F}{m} + 2\left(g - \frac{2F}{3m}\right) + g - \frac{F}{3m} = 0, \text{ или } \frac{F}{m} = \frac{3}{2}g.$$

Таким образом, левый груз движется с ускорением  $+g/2$ , ускорение среднего груза равно нулю, а правый груз движется с ускорением  $-g/2$ .

А. Старов

**Ф2406.** Волан для бадминтона имеет массу  $m = 5 \text{ г}$  и площадь поперечного сечения  $S = 30 \text{ см}^2$ . При движении в воздухе со скоростью  $v$  волан испытывает силу сопротивления, направленную против скорости и равную  $F = kv^2\rho S$ , где  $\rho = 1 \text{ кг/м}^3$  — плотность воздуха. После удара ракеткой волан приобрел вертикальную скорость  $v_0 = 20 \text{ м/с}$  и взлетел над местом удара на высоту  $H = 10 \text{ м}$ . Чему равен коэффициент  $k$ ? Каким было ускорение волана сразу после удара? На какую высоту взлетел бы волан, если бы его начальная вертикальная скорость равнялась  $10 \text{ м/с}$ ? Подсказка. Для нахождения численных ответов воспользуйтесь калькулятором.

Выберем вертикальную ось координат с началом в месте старта волана и направим ее вверх. В соответствии с условием задачи при движении вверх изменение скорости волана подчиняется уравнению движения (второму закону Ньютона)

$$\begin{aligned} \frac{dv}{dt} &= -g - v^2 \frac{kS\rho}{m} \Rightarrow v dt \frac{dv}{dt} = v dt \left( -g - v^2 \frac{kS\rho}{m} \right) \Rightarrow \\ &\Rightarrow \frac{dv^2}{v^2 + \frac{gm}{kS\rho}} = -2 \frac{kS\rho}{m} v dt = -2 \frac{kS\rho}{m} dx \Rightarrow \\ &\Rightarrow \ln \left( \frac{v^2 + \frac{gm}{kS\rho}}{v_0^2 + \frac{gm}{kS\rho}} \right) = -2 \frac{kS\rho}{m} x \Rightarrow \\ &\Rightarrow \frac{\frac{gm}{kS\rho}}{v_0^2 + \frac{gm}{kS\rho}} = \exp \left( -2 \frac{kS\rho}{m} H \right). \end{aligned}$$

Приходим к трансцендентному уравнению для нахождения величины  $k$ :

$$\exp \left( \frac{2kS\rho H}{m} \right) = 1 + \frac{v_0^2 kS\rho}{gm}.$$

При подстановке численных значений величин, приведенных в условии задачи, получается уравнение

$$\exp(12k) = 1 + 24k.$$

Корень этого уравнения ищем с помощью калькулятора или компьютера:

$$12k \approx 1,257, \text{ и } k \approx 0,105.$$

Подставим это значение  $k$  и другие величины, заданные в условии задачи, в уравнение движения волана (в

самой первой записи) и найдем его ускорение в начальный момент времени:

$$a = \frac{dv}{dt} \approx 3,4g \approx 34 \text{ м/с}^2.$$

Если изменить начальную скорость  $v_0$ , то в соответствии с полученным уравнением можно найти и новую высоту, на которой скорость волана обращается в ноль. В частности, при  $v_0 = 10 \text{ м/с}$  высота подъема волана будет равна  $h \approx 3,9 \text{ м}$ .

Д. Сергеев

**Ф2407.** Оцените по фотографии, приведенной на рисунке, размеры стеклянного кубика, лежащего на горизонтальной поверхности стекла. Коэффициент поверхностного натяжения воды  $\sigma = 7 \cdot 10^{-2} \text{ Дж/м}^2$ .



Судя по картинке, угол смачивания водой горизонтальной поверхности стекла равен примерно  $90^\circ$ . В таком случае максимальная глубина большой лужи воды на поверхности стекла равна

$$h = \sqrt{\frac{2\sigma}{\rho g}} \approx 3,7 \text{ мм}.$$

При этом радиус кривизны  $R$  поверхности воды вблизи самого края большой лужи равен  $R = \sqrt{\sigma/(2\rho g)}$ , что в два раза меньше, чем  $h$ . На картинке можно прямым измерением линейкой с миллиметровыми делениями найти длину  $L$  диагонали верхней грани кубика. Эта диагональ, как видно, практически перпендикулярна оси симметрии объектива фотоаппарата, с помощью которого была сделана фотография. В этом же направлении можно измерить длину  $\lambda$  участка большой лужицы, примыкающей слева к кубику, на которой кривизна поверхности воды становится настолько малой, что лужица отражает свет, как зеркало. Это расстояние по порядку величины равно  $h$ . Измерения дают, что  $L/\lambda \approx 10$ . Отсюда можно оценить длину ребра кубика:

$$A = \frac{h(L/\lambda)}{\sqrt{2}} = 26,16 \text{ мм} \approx 2,6 \text{ см}.$$

В. Стеклов

**Ф2408.** Влажный воздух с относительной влажностью  $\varphi = 100\%$  находился в сосуде с постоянным большим объемом под давлением  $p = 10^5 \text{ Па}$  и при

температуре  $t_1 = 28^\circ\text{C}$ . Этот воздух охладил до температуры  $t_2 = 10^\circ\text{C}$ , и в сосуде возник туман. Какое количество теплоты пришлось отвести от каждого  $1\text{ м}^3$  объема воздуха? Какое давление установилось в сосуде? Давления насыщенных водяных паров при начальной и конечной температурах равны  $p_{н1} = 3,77\text{ кПа}$  и  $p_{н2} = 1,23\text{ кПа}$  соответственно. Молярная теплота испарения воды при  $100^\circ\text{C}$  равна  $L_M = 40,6\text{ кДж/моль}$ .

Будем рассматривать по отдельности воздух и водяные пары в нем. Начальное давление воздуха равно  $p_{в1} = p - p_{н1} = 96,23\text{ кПа}$ . Конечное давление воздуха равно

$$p_{в2} = p_{в1} \frac{273+10}{273+28} = 90,47\text{ кПа}.$$

К давлению воздуха добавляется давление насыщенных паров воды, поэтому в сосуде установится давление

$$p_2 = p_{в2} + p_{н2} = 91,7\text{ кПа}.$$

В рассматриваемом процессе работа воздухом не совершается, поэтому воздух из каждого кубометра отдал количество теплоты

$$Q_1 = \frac{5}{2} \Delta p V \approx \frac{5}{2} (p - p_2) V \approx 14,4\text{ кДж}.$$

Вначале в  $1\text{ м}^3$  воздуха воды было

$$v_1 = \frac{p_{н1} V}{RT_1} = 1,5\text{ моль}.$$

После охлаждения в воздухе воды осталось

$$v_2 = \frac{p_{н2} V}{RT_2} = 0,52\text{ моль}.$$

Сконденсировалось, таким образом, всего  $0,98$  моль воды, или  $17,7\text{ г}$ .

Количество теплоты, отданное той частью воды, которая осталась в состоянии пара, равно

$$Q_2 = \frac{6}{2} p_{н2} \left( \frac{273+28}{273+10} - 1 \right) V \approx 0,2\text{ кДж}.$$

Осталось найти количество теплоты, выделившееся при конденсации водяных паров в количестве  $0,98$  моль в воздухе, которое тоже нужно отводить.

В недавно опубликованном решении задачи Ф2357 (см. «Квант» №1 за 2015 г.) найдена теплота испарения одного моля воды  $Q_{исп}$  при температуре  $t_0$ , лежащей в промежутке от  $0^\circ\text{C}$  до  $100^\circ\text{C}$ . (Нас же интересует противоположный процесс – конденсация водяного пара.) Воспользуемся этим решением:

$$Q_{исп} = L_M + C_M (100^\circ - t_0) - (C_V + R)(100^\circ - t_0).$$

Здесь  $C_M$  – это молярная теплоемкость жидкой воды,  $C_V$  – это молярная теплоемкость пара воды в процессе с постоянным объемом. Для температуры  $+28^\circ\text{C}$   $Q_{исп1} = 43,65\text{ кДж}$ , для температуры  $+10^\circ\text{C}$   $Q_{исп2} = 44,41\text{ кДж}$ . Примем в качестве среднего значения  $Q_{исп} = 44\text{ кДж}$ . В результате конденсации  $\Delta v = v_1 - v_2 =$

$= 0,98$  моль воды выделится количество теплоты

$$Q_3 = \Delta v Q_{исп} = 43,3\text{ кДж}.$$

Итого, требуется отвести от каждого кубометра влажного воздуха количество теплоты

$$Q = Q_1 + Q_2 + Q_3 \approx 14,4\text{ кДж} + 0,2\text{ кДж} + 43,3\text{ кДж} \approx 58\text{ кДж}.$$

Как видно, наибольший вклад в это количество дал процесс конденсации воды.

В.Туманов

**Ф2409.** Два провода ЛЭП (линии электропередач) постоянного тока находятся на одном уровне высоко над землей (представьте, что провода переброшены через Большой Каньон) на расстоянии  $L = 3\text{ м}$  друг от друга и параллельно местному меридиану. Радиус поперечного сечения каждого провода  $r = 1\text{ см} \ll L$ . Потенциалы проводов по отношению к земле имеют одинаковые величины и противоположные знаки. С помощью малогабаритного беспилотного вертолета, несущего на себе измерительную аппаратуру и левешего на той же высоте над землей, что и провода, была измерена напряженность статического электрического поля в точке, находящейся на расстоянии  $L$  восточнее одного из проводов, и на расстоянии  $2L$  восточнее другого, и она оказалась равной  $E = 3\text{ кВ/м}$ . В этом же месте была измерена вертикальная составляющая вектора индукции магнитного поля:  $B_1 = 1,3 \cdot 10^{-4}\text{ Тл}$ , направленная вверх. На расстоянии  $100\text{ м}$  от ЛЭП вертикальная составляющая магнитного поля Земли направлена вниз и равна  $B_2 = 4,7 \cdot 10^{-5}\text{ Тл}$ , а электрическое поле мало настолько, что чувствительности приборов не хватило, чтобы его измерить. Каково все-таки электрическое поле, созданное проводами ЛЭП, на расстоянии  $100\text{ м}$  от них по горизонтали? Какая мощность передается по этой ЛЭП? На севере или на юге от участка, на котором проводились измерения, находится электростанция?

Проще всего ответить на последний вопрос задачи о расположении электростанции. Энергия электромагнитного поля «бежит» от электростанции к потребителям в пространстве возле проводов ЛЭП. Направление распространения энергии определяется вектором плотности потока энергии в данной точке пространства, т.е. вектором Пойнтинга

$$\vec{P} = \frac{1}{\mu_0} [\vec{E} \times \vec{B}].$$

В данном случае он направлен на юг, значит, электростанция находится на севере.

Напряженность электрического поля, созданного длинным проводом с равномерным по длине распределением зарядов на нем, убывает обратно пропорционально расстоянию от точки, где измеряется поле, до провода. Суммарное поле, созданное двумя проводами, в указанной в условии точке равно  $E = 3\text{ кВ/м}$ . Следовательно, ближайший к этой точке положительно заряженный провод создает свой вклад в эту величину, равный  $2E = 6\text{ кВ/м}$  в направлении на восток, а

расположенный дальше от этой точки отрицательно заряженный провод создает в этой точке поле  $E = 3 \text{ кВ/м}$  в направлении на запад. На расстоянии  $100 \text{ м}$  от положительно заряженного провода его вклад в суммарное поле будет равен  $(6 \text{ кВ/м}) \cdot \frac{3}{100} = 0,18 \text{ кВ/м}$  в направлении на восток, а более далекий отрицательно заряженный провод создает вклад  $(3 \text{ кВ/м}) \cdot \frac{6}{103} = 0,175 \text{ кВ/м}$  в направлении на запад. Суммарный вектор напряженности электрического поля направлен на восток и равен

$$E_1 \approx 5,24 \text{ В/м}.$$

Провода имеют одинаковые по величине, но противоположные по знаку потенциалы по отношению к земле, поэтому разность потенциалов между ними равна удвоенному значению положительного потенциала  $\varphi$ . Очевидно, что линия между проводами, расположенная на одинаковых расстояниях от каждого из проводов, имеет нулевой потенциал. Найдем потенциал одного провода:

$$\begin{aligned} \varphi &= \int_R^{L/2} \frac{2LE}{x} dx + \int_{L/2}^L \frac{2LE}{x} dx = \int_R^L \frac{2LE}{x} dx = \\ &= 2LE \cdot \ln \frac{L}{R} = 102,67 \text{ кВ}. \end{aligned}$$

Таким образом, напряжение между проводами ЛЭП составляет

$$U \approx 205 \text{ кВ}.$$

Для вычисления мощности ЛЭП нужно знать, какой ток течет по проводам. Из того что на большом расстоянии от ЛЭП земное магнитное поле имеет вертикальную составляющую  $B_2$ , направленную вниз, а в точке измерения магнитное поле имеет вертикальную составляющую  $B_1$ , направленную вверх, можно найти суммарное магнитное поле, создаваемое двумя проводами вместе – оно равно  $B_1 + B_2 = 17,7 \cdot 10^{-5} \text{ Тл}$  и направлено вверх. Это означает, что ближайший к точке измерения провод создает в этой точке вдвое большее поле  $B_0$ , т.е.

$$B_0 = 2(B_1 + B_2) = 35,4 \cdot 10^{-5} \text{ Тл}.$$

Ток, текущий в этом проводе равен

$$I = 2\pi L \frac{B}{\mu_0} = 531 \text{ А}.$$

Следовательно, мощность, передаваемая по ЛЭП потребителям электрической энергии, равна

$$P = IU \approx 109 \text{ МВт}.$$

*А.Вольтов*

**Ф2410.** Вдоль экватора на опорах проложили провод из алюминия с поперечным сечением  $S = 1 \text{ см}^2$ . Магнитное поле вблизи экватора однородное, горизонтальное, направленное к северу и равное по величине  $B = 3 \cdot 10^{-5} \text{ Тл}$ . Какой ток нужно пропустить по проводу, чтобы он перестал давить на опоры

(начал левитировать)? Оцените допустимую продолжительность этого эксперимента, если провод не успевает отводить тепло в окружающее пространство. Тепловые и электрические характеристики алюминия отыщите в справочниках самостоятельно.

Сила Ампера, действующая на провод, конечно, должна быть направлена вверх, поэтому электроны, которые являются свободными носителями зарядов в металлах, должны в этом проводе двигаться на запад. Из справочника находим плотность алюминия:  $D = 2,7 \text{ г/см}^3$ , температуру плавления:  $t = 660 \text{ }^\circ\text{C}$ , удельную теплоту плавления:  $L = 390 \text{ кДж/кг}$ . Удельное сопротивление алюминия при комнатной температуре равно  $\rho = 0,027 \text{ Ом} \cdot \text{мм}^2/\text{м}$  и возрастает примерно в два раза при температуре плавления алюминия. Молярную теплоемкость алюминия можно считать равной  $3R = 25 \text{ Дж}/(\text{моль} \cdot \text{К})$ . Молярная масса алюминия  $M = 27 \text{ г/моль}$ . Чтобы провод начал левитировать, сила Ампера должна уравновесить силу тяжести. Значит, по проводу нужно пропустить ток

$$I = \frac{F_A}{Bl} = \frac{mg}{Bl} = \frac{DlSg}{Bl} = \frac{DSg}{B} = 9 \cdot 10^4 \text{ А}.$$

Для ответа на вопрос о максимальном времени эксперимента нужно вычислить энергию, необходимую, чтобы расплавить алюминий. Мощность, выделяющаяся в одном метре провода в начальный момент, когда его температура невысока, равна

$$P = I^2 R = \frac{I^2 \rho l}{S} \approx 2,2 \text{ МВт}.$$

К моменту когда провод прогреется до температуры плавления алюминия, мощность вырастет в два раза. В каждом метре провода содержится  $10 \text{ моль}$  вещества. Чтобы это количество вещества нагреть от  $20 \text{ }^\circ\text{C}$  до  $660 \text{ }^\circ\text{C}$  требуется  $Q_1 = 0,16 \text{ МДж}$  тепла, а чтобы затем его расплавить, требуется еще  $Q_2 = 0,105 \text{ МДж}$ . Если считать, что удельное сопротивление металла не меняется с ростом температуры, то время эксперимента будет равно

$$t = \frac{Q_1 + Q_2}{P} = \frac{0,265 \text{ МДж}}{2,2 \text{ МВт}} \approx 0,12 \text{ с}.$$

Если же считать, что удельное сопротивление соответствует температуре плавления, то время эксперимента будет вдвое меньше, т.е. приблизительно  $0,06 \text{ с}$ . В качестве оценки возьмем среднее арифметическое:  $t_{\text{ср}} \approx 0,09 \text{ с}$ .

(Кстати, в начальный момент, когда провод еще холодный, на каждом метре провода должно быть напряжение, вдвое меньшее напряжения в конце эксперимента.)

*Э.Амперов*

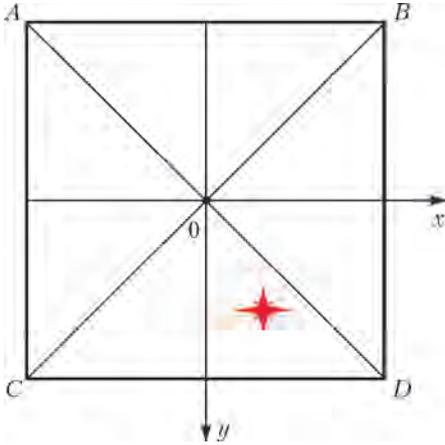
**Ф2411.** Над плоским квадратным листом бумаги расположен неподвижный точечный изотропный источник света. Известны освещенности поверхности листа вблизи трех углов квадрата:  $E_1 > E_2 > E_3$ . Эти величины меньше максимальной освещенности поверхности бумаги в одной из точек листа. Какова

освещенность поверхности вблизи четвертого угла этого листа бумаги?

Если освещенность четвертого угла  $E_4$  не равна ни одной из величин  $E_1$ ,  $E_2$  и  $E_3$ , то вариантов может быть четыре:

$$\begin{aligned} E_4 &> E_1 > E_2 > E_3, & E_1 > E_4 > E_2 > E_3, \\ E_1 &> E_2 > E_4 > E_3, & E_1 > E_2 > E_3 > E_4. \end{aligned}$$

Четвертый угол может занимать положения, отмеченные на рисунке буквами  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$ . Положение источника света над квадратным листом отмечено



звездочкой. Центр квадрата примем за начало координат, оси  $x$  и  $y$  находятся в плоскости листа, а ось  $z$  направлена перпендикулярно листу. Пусть ребро квадрата имеет длину  $2a$ , координаты источника света  $(x, y, z)$ , причем, как видно из рисунка,  $x < y < a$ . Освещенности точек  $A, B, C, D$  можно выразить через освещенность  $E_0$  в центре квадрата следующим образом:

$$\begin{aligned} E_D &= E_0 \frac{a^2 z}{\left(z^2 + (a-x)^2 + (a-y)^2\right)^{3/2}}, \\ E_C &= E_0 \frac{a^2 z}{\left(z^2 + (a+x)^2 + (a-y)^2\right)^{3/2}}, \\ E_B &= E_0 \frac{a^2 z}{\left(z^2 + (a-x)^2 + (a+y)^2\right)^{3/2}}, \\ E_A &= E_0 \frac{a^2 z}{\left(z^2 + (a+x)^2 + (a+y)^2\right)^{3/2}}. \end{aligned}$$

Отсюда можно получить выражения для одной из неизвестных освещенностей через три известные:

$$\begin{aligned} E_D &= \left(E_1^{-2/3} + E_2^{-2/3} - E_3^{-2/3}\right)^{-3/2}, \\ E_C &= \left(E_1^{-2/3} + E_3^{-2/3} - E_2^{-2/3}\right)^{-3/2}, \\ E_B &= \left(E_1^{-2/3} + E_3^{-2/3} - E_2^{-2/3}\right)^{-3/2}, \\ E_A &= \left(E_2^{-2/3} + E_3^{-2/3} - E_1^{-2/3}\right)^{-3/2}. \end{aligned}$$

Если освещенность четвертого угла равна одной из известных освещенностей, то это возможно в одной единственной ситуации:  $E_2 = E_4$ . В итоге получается,

что для неизвестной освещенности четвертого угла возможны четыре разных варианта ответа:

$$E_4 = E_2, \quad E_4 = E_D, \quad E_4 = E_C, \quad E_4 = E_A.$$

С.Варламов

**Ф2412.** Толщина стенок шарообразной стеклянной ампулы  $h = 1$  мм, внешний радиус ампулы  $R = 1$  см. В ампулу помещен радий в количестве  $m = 1$  мг, а воздух из ампулы откачан. Известно, что из  $M = 1$  г радия за 1 секунду вылетает в среднем  $N = 3,7 \cdot 10^{10}$   $\alpha$ -частиц (ядер гелия). Найдите установившееся давление образовавшегося в ампуле гелия при температуре  $T = 300$  К. Коэффициент диффузии гелия в стекле при такой температуре равен  $D = 5,7 \cdot 10^{-6}$  см<sup>2</sup>/с. Через какое время после начала эксперимента давление внутри будет отличаться от установившегося значения не более чем на  $\eta = 1\%$ ?

Давление газа можно найти из основного уравнения молекулярно-кинетической теории газов  $p = nkT$ , где  $n$  – концентрация частиц. Явление диффузии и явление теплопередачи математически описываются одинаково. Если концентрации гелия внутри  $n_1$  и снаружи  $n_2$  отличаются, то поток  $J$  частиц через стенку колбы наружу равен

$$J = \frac{4\pi R^2 D (n_1 - n_2)}{h}.$$

Установившуюся концентрацию частиц гелия  $n_{\text{уст}}$  внутри, с учетом того, что их концентрация снаружи равна нулю, найдем из условия равенства скорости поступления частиц в колбу и скорости убывания частиц через стенки колбы:

$$\frac{Nm}{M} = \frac{4\pi R^2 D n_{\text{уст}}}{h}.$$

Отсюда находим установившееся давление в ампуле:

$$p_{\text{уст}} = kT n_{\text{уст}} = \frac{kThNm}{4\pi R^2 DM} \approx 1,2 \cdot 10^{-8} \text{ Па}.$$

Если с момента начала эксперимента прошло немного времени, то со временем концентрация частиц внутри растет и этот рост описывается уравнением

$$\frac{dn}{dt} = \frac{(Nm/M) - (4\pi R^2 D n_t / h)}{4\pi R^3 / 3}.$$

Решением такого уравнения является экспоненциальная функция

$$n_t = n_{\text{уст}} \left(1 - \exp\left(-\frac{3D}{Rh} t\right)\right).$$

Чтобы концентрация гелия внутри колбы отличалась от установившейся концентрации не более чем на 1%, требуется время

$$\tau = 2 \frac{Rh}{3D} \ln 10 \approx 7,5 \text{ ч}.$$

Й.Идар

# Задачи

1. Найдите какие-нибудь два различных натуральных числа, больших пяти, которые и в сумме, и в произведении дают палиндром. (Напомним, что число называется палиндромом, если цифры в нем идут слева направо в таком же порядке, что и справа налево, например: 717, 55, 3223.)

А.Меньщиков



2. Белоснежка испекла на праздник торт, разграфленный на клеточки и украшенный вишенками, как показано на рисунке. Отрезав себе угловую клеточку (правую нижнюю), она хочет разделить оставшуюся часть торта на 7 одинаковых по размеру и форме кусков так, чтобы каждому из семи гномов досталось по целой вишенке. Помогите Белоснежке это сделать.

М.Евдокимов



3. Один мудрец заметил: «Наконец настал такой год, что количество зерен, равное номеру года, можно разложить по клеткам шахматной доски так, чтобы ни на каких двух клетках не было поровну зерен». В каком году произошла эта история?

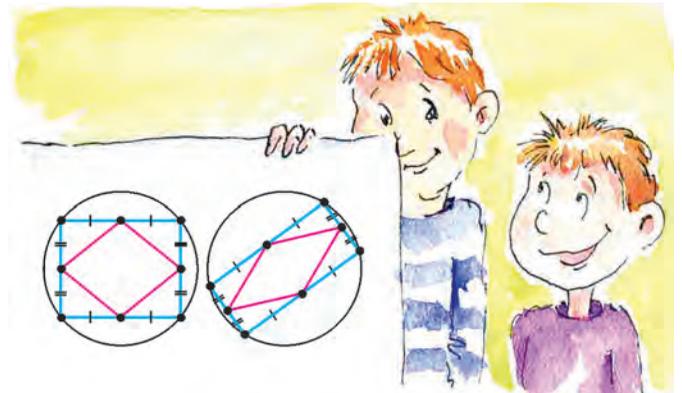
Е.Бакаев, А.Заславский

Эти задачи предназначены прежде всего учащимся 6–8 классов.



4. Петя и Вася вписали в круги одного и того же радиуса 5 см по прямоугольнику. Затем каждый из них соединил середины сторон своего прямоугольника и получил ромб (как на рисунке). Докажите, что стороны этих ромбов одинаковы, и найдите их длины.

Г.Гальперин



5. Рыцари двух кланов собрались в замке на переговоры и расселись в каком-то порядке за большим круглым столом. Оказалось, что рыцарей, справа от которых сидит рыцарь из другого клана, столько же, сколько и рыцарей, справа от которых сидит рыцарь из его же клана. Докажите, что общее число рыцарей делится на 4.

Г.Гальперин



# Чья площадь больше

К. КОХАСЬ

**Б**УСЕНЬКА И ЕЕ ДРУЗЬЯ – МЫШЬ ОГРЫЗА, ТАРАКан Кузька и уж Ушася – праздновали день рождения дятла Спятла. Занимательные конкурсы, прекрасное угощение и подаренный виновнику торжества торт со слониками сделали праздник интересным и запоминающимся. Как вдруг...

– Спасайся, кто может! – закричал дятел Спятел и выпрыгнул в окно.

Гости бросились врассыпную. Огрыза нырнула в подвал, Кузька исчез за шкафом, а Бусенька, схватив Ушасю за что попало (а попался, естественно, хвост), запрыгнула в сейф дятла Спятла, выкинув из него статуэтку Хрустального Питона. Комната начала заполняться блестящими кольцами питона Уккха.

– Где же именинникххх? – поинтересовался Уккх. – И куда пропали госссти? – продолжал он, осматриваясь, постоянно высовывая длинный раздвоенный язык – принюхиваясь. – А, вот вы куда залезли, – сказал он, заметив сейф.

– Вылезайте, – строго сказал Уккх и сквозь замочную скважину посмотрел на Ушасю так, что тому захотелось все бросить и побежать, запрыгать, поползти, протиснуться, полететь и броситься прямо Уккху в пасть. К счастью, Бусенька крепко держала дверь.

– Не вылезем! – сказала она. – Дверь закрыта, а площадь сечения замочной скважины – 3 квадратных

сантиметра – слишком мала, чтобы мы через нее пролезли.

Уккх проглотил огромный кусок торта («Ммм... какие вкусные слоники!»), отправил в пасть миску витаминного салата из огурцов с остроухом и задумался. Взгляд его немного подобрел.

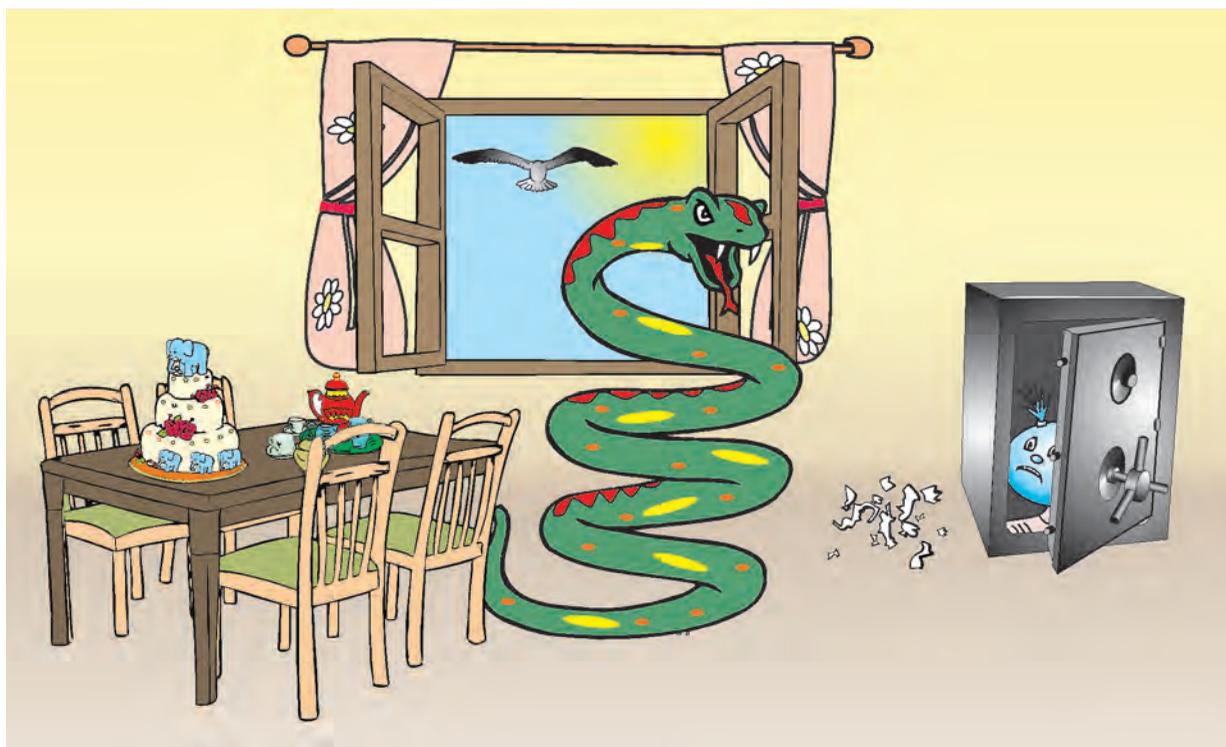
– У замочной скважины довольно сложная форма, – наконец сказал он. – Как же ты подсчитала ее площадь?

– Сначала съешь вон ту банку варенья, – сказала Бусенька, не отпуская дверцу, – а после этого поговорим!

Уккх схватил кончиком хвоста банку варенья и послушно проглотил ее содержимое. Поморщившись и поискав взглядом по сторонам, он кинул в пасть нераспечатанную упаковку печенья. Бусенька выждала 20 секунд и приоткрыла дверцу сейфа.

– Печеные яблоки явно удались! – посоветовала она, показав на блюдо с яблоками. Уккх тут же надкусил одно яблоко и одобрительно кивнул.

– Как я подсчитала площадь? Да как обычно. Что такое площадь фигуры? Это такое число. Во-первых, оно неотрицательно. Во-вторых, площадь совсем простой фигуры, например прямоугольника, равна произведению длин его сторон. В-третьих, если маленькая фигура содержится в большой, то площадь маленькой фигуры не может быть больше площади большой



фигуры. И наконец, в-четвертых, если фигуру разрезать по прямой на две части, площадь фигуры будет равна сумме площадей частей.

– А если резать не по прямой? – с подозрением спросил Ушася.

– Все зависит от того, как ты понимаешь слово «резать».

– Какое непростое определение, – сказал Уккх, – и как же найти площадь сложной фигуры, такой, как сечение замочной скважины?

– И вообще, у любой ли фигуры существует площадь? – усомнился Ушася.

– У любой! – стала объяснять Бусенька. – Представим себе, что мы накрыли фигуру несколькими квадратами, причем мы используем только квадраты с вертикальными или горизонтальными сторонами. Подсчитаем сумму их площадей. Потом покроем фигуру квадратиками помельче, чтобы они лучше прилегали к ее границам. Снова подсчитаем сумму площадей. Каждое такое вычисление дает нам слегка завышенное значение площади фигуры. Чем больше таких экспериментов мы проведем, тем точнее нам будет известна площадь фигуры.

– Неужели этот громоздкий рецепт действительно позволяет вычислить площадь хоть какой-нибудь фигуры? – спросил Уккх.

– Конечно, позволяет! Вот, например, найдите, чему равна площадь треугольника.

– Ну... если это не очень сложно...

– Не должно быть сложно, – воодушевился Ушася. – Возьмем прямоугольный треугольник  $ABC$  – половину единичного квадрата. Положим его на лист клетчатой бумаги. Пусть длина стороны клетки равна  $1/n$ . Тогда вдоль стороны помещается ряд из  $n$  клеток (на рисунке 1 оказалось  $n = 8$ ). А весь треугольник

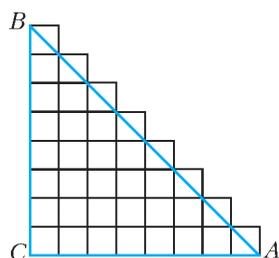


Рис. 1

покрывается ступенчатой фигурой из клеточек: в верхнем ряду одна клетка, во втором ряду – две, в третьем – три и т.д. вплоть до последнего ряда, где  $n$  клеток. Всего, значит, имеется

$$1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

клеток. Площадь одной клеточки равна  $1/n^2$ , значит, суммарная площадь этой клетчатой фигуры равна

$$\frac{1}{n^2} \cdot \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n+1}{2n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2n}.$$

Чем больше мы возьмем число  $n$ , тем меньше будет сторона клеточки  $1/n$  и слагаемое  $1/(2n)$  в подсчитанной нами суммарной площади и тем ближе будет эта

величина к  $1/2$ . Поэтому площадь этого треугольника равна  $1/2$ .

– И для замочной скважины вычисления аналогичны, – подтвердила Бусенька. – Только там формулы похитрее. Но у меня геометрический сопроцессор, мне такие штуки легко даются.

– Все ясно, – сказал Уккх. – А правильно ли я понял, что необязательно брать квадратики одинакового размера? И вообще можно брать не квадратики, а прямоугольники. Некоторые могут быть совсем крупными, а некоторые совсем маленькими.

– Зачем так усложнять? – возразил Ушася. – Сначала берешь крупную сетку, потом помельче, потом – совсем миллиметровку... Главное, каждый раз учитывать только те квадратики, которые задевают фигуру. Очень хороший и практичный способ получается, мне он очень нравится.

– Нет-нет, – не согласилась Бусенька, – клеточки могут быть разными, не только квадратными, но и прямоугольными. Если вам нужно, они могут пересекаться, и вообще их может быть бесконечно много!

– Как это бесконечно много? Мы же считаем площадь ограниченной фигуры!

– Ну да, фигура ограниченная, скажем помещается на одном листе бумаги, но квадратики могут быть и очень-очень маленькими – настолько, что в результате их общее количество бесконечно!

– Я понял, – сказал Уккх. – Например, в предыдущем вычислении можно было бы накрыть весь треугольник такими вот уменьшающимися клеточками:

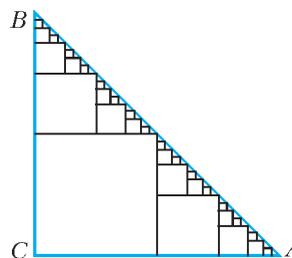


Рис. 2

Тут вообще все клеточки уместаются внутри фигуры. Правда... если мы хотим, чтобы треугольник содержался в объединении этих клеточек, лучше бы взять его без стороны  $AB$ . Зато клеточек получается бесконечно много (рис.2)!

– Только не надо думать, что прямоугольники обязательно должны уместаться внутри фигуры, – предупредила Бусенька, – они запросто могут вылезать за ее пределы – так же, как это было в вычислении Ушаси.

– Мой подход к вычислению площади значительно проще и удобнее, чем у Уккха! – заявил Ушася.

– А мой – более гибкий! – возразил Уккх и облизнулся.

– Да что тут спорить, – вмешалась Бусенька, – давайте я попрошу вас вычислить площадь какой-нибудь хитрой фигуры, у кого лучше получится – тот и прав!

– Разве таким способом принято решать математические споры? – усомнился Ушася.

– Давай нам свою хитрую фигуру, – энергично потребовал Уккх.

– Хорошо. Но сначала скажите-ка мне для разминки, чему равна площадь одной точки, например точки  $A$  из нашего предыдущего треугольника?

– Нулю, – тут же сказал Уккх, – мы можем накрыть точку квадратиком со стороной 1, значит, площадь точки меньше 1. Но мы можем накрыть ее и квадратиком со стороной  $1/10$ , тогда получится, что площадь точки меньше  $1/100$ . И точно так же окажется, что площадь точки меньше любого другого положительного числа. Значит, площадь равна нулю.

– Ладно, тогда вот вам хитрая фигура! Возьмем все тот же треугольник  $ABC$ . И нарисуем внутри него линии первой сетки – той, где размер клеточек был равен  $1/2$ . Потом нарисуем внутри него линии более мелкой сетки – со стороной  $1/3$  (рис.3). Кстати, а чему

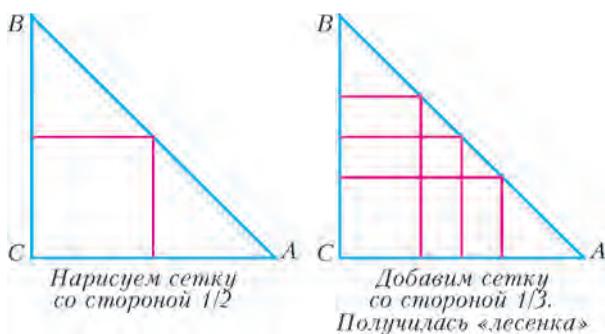
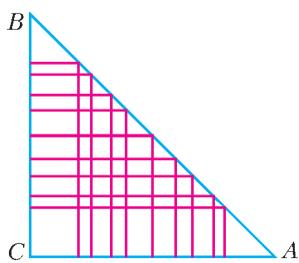


Рис. 3

равна площадь «лесенки», составленной из этих линий?

– Тоже нулю, – выпалил Ушася. – На листе из очень мелкой миллиметровки каждый нарисованный отрезок накрыт длинным прямоугольником, состоящим из одного ряда клеток. Ширина такого прямоугольника равна стороне одной клетки, поэтому его площадь очень мала. Всего у нас будет шес-с-с-ть таких прямоугольников, их суммарная площадь тоже очень мала. Какое положительное число ни возьми, эту лесенку можно накрыть прямоугольниками, у которых сумма площадей будет меньше этого числа. Значит, площадь лесенки равна нулю.

– Правильно! – согласилась Бусенька. – Но я еще не дорисовала хитрую фигуру. Мы уже нарисовали линии сетки со сторонами  $1/2$  и  $1/3$ . Теперь нарисуем линии следующей сетки – со стороной  $1/4$ , потом со стороной  $1/5$  (рис.4) – и так далее (до бесконечности).



Потом добавим сетки со стороной  $1/4$  и  $1/5$

Рис. 4

Моя хитрая фигура – это объединение всех-всех этих линий. Спрашивается, чему равна ее площадь?

– Одной второй, – немного подумав, сказал Ушася.

– Нулю, – почти сразу же с ним произнес Уккх.

– А как вы посчитали?

– Возьмем совершенно любую квадратную сетку, – стал объяснять Ушася, –

к примеру со стороной квадрата  $1/100$ . Посмотрим только на квадратике, накрывающие треугольник. Мы должны выбрать из них набор квадратиков, накрывающих хитрую фигуру. Но фигура действительно ужасно хитрая: она ведь содержит все линии более мелкой сетки со стороной  $1/200$ , а они пересекают каждый квадратик сетки со стороной  $1/100$ . Получается, что, для того чтобы накрыть фигуру, нам придется взять все квадратике, накрывающие треугольник  $ABC$ ! Значит, любое измерение площади фигуры «по клеточкам» дает такой же результат, как для треугольника  $ABC$ . Поэтому площадь фигуры равна площади треугольника!

– Хм, вроде все верно. А ты как посчитал? – спросила Бусенька Уккх.

– Площадь равна нулю, поскольку я могу накрыть эту фигуру набором прямоугольников сколь угодно маленькой площади, – уверенно сказал Уккх. – Вот, например, как построить набор прямоугольников, что-

бы их суммарная площадь была равна  $\frac{1}{1000}$ ? Начнем рисовать первую сетку (со стороной  $\frac{1}{2}$ ).

Нарисуем первый отрезок и сразу накроем его каким-нибудь прямоугольником площади  $\frac{1}{1000} \cdot \frac{1}{2}$ . Нарисуем второй отрезок и накроем его каким-нибудь прямоугольником

площади  $\frac{1}{1000} \cdot \frac{1}{4}$ . Потом нарисуем третий отрезок.

Ой, нет, в первой сетке больше нет отрезков, значит, переходим к рисованию отрезков второй сетки. Рисуем отрезок второй сетки и накрываем его прямоугольником

площади  $\frac{1}{1000} \cdot \frac{1}{8}$ . И так далее: рисуя очередной отрезок очередной сетки, тут же накрываем его прямо-

угольником, площадь которого в два раза меньше предыдущего прямоугольника. Получится бесконечно много прямоугольников, но их площадь конечна и очень мала. Она равна

$$\frac{1}{1000} \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots \right) = \frac{1}{1000}.$$

Итак, я накрыл фигуру прямоугольниками суммарная площадь которых равна  $1/1000$ , а мог бы вместо  $1/1000$  взять любое другое положительное число. Значит, площадь фигуры равна нулю.

– Выглядит убедительно, – согласилась Бусенька.

– Моя площадь больше – значит, я выиграл! – закричал Ушася.

– А тогда я тебя съем! – злобно ответил Уккх.

Но Бусенька была начеку. Схватив Ушасю за что попало (да-да, опять за хвост, вы правильно догадались), она прыгнула в сейф. Уккх посмотрел на захлопнувшуюся дверцу и на Хрустального Питона, валявшегося на полу, и грустно облизнулся.

– Здорово я его обыграл? – спросил Ушася Бусеньку, когда увидел, что они надежно заперлись в сейфе.

– Здорово, – сказала Бусенька. – Но ты заметил, что площадь у тебя странная? Площадь хитрой фигуры

равна  $1/2$ , и точно так же проверяется, что площадь остальной части треугольника тоже равна  $1/2$ . Получается, что мы разбили треугольник площади  $1/2$  на две части, и у обеих частей площадь равна  $1/2$ !

– Действительно странно... Но погоди, это же не противоречит твоему определению площади! Ты же говорила, что площадь фигуры равна сумме площадей кусочков в том случае, когда мы режем фигуру по

прямой. А здесь нет ничего похожего на разрезание по прямой. Твою хитрую фигуру вообще невозможно вырезать из треугольника! А что, у Уккха площадь не странная?

– Тоже странная. Но в этом можно убедиться с помощью уж совсем хитрых фигур.

– Ну, значит, я действительно его победил!

## Большой Рот в полете

*А.ЛЕТОВ*

**К**ПИЛОТИРУЕМОЙ ПОЛОСКЕ, ОПИСАННОЙ В «Кванте» №4 за 2013 год, мы добавим еще один пилотируемый летательный аппарат из бумаги – это *Большой Рот*. Он проще в изготовлении и демонстри-

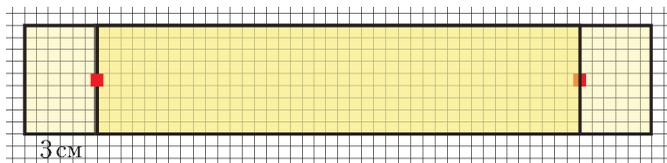


Рис. 1. Две желтые полоски бумаги, скрепленные маленькими кусочками красного скотча

рует такие же летные качества, как и пилотируемая полоска.

Большой Рот собирается из двух прямоугольных бумажных полосок размером  $4,5 \times 23$  см. Они накладываются друг на друга со сдвигом в 3 см и затем скрепляются двумя маленькими кусочками скотча (рис.1). Если вы возьметесь за середину одной полоски, то Большой Рот раскроется (рис.2). А если еще слегка подкрутить его и отпустить, он начнет вращаться в воздухе и медленно планировать. Большой Рот, сделанный из легкой бумаги, держится в воздухе достаточно долго, и его можно пилотировать!



Рис. 2. Раскрытый Большой Рот

Лучший материал для изготовления Рта – тонкие листы из большого телефонного справочника «Желтые страницы». Впрочем, подойдет и тонкая газетная бумага.

А теперь перейдем непосред-



Рис. 3. Пилотирование Большого Рта

ственно к пилотированию Большого Рта. Для этого нам понадобится еще картонка размером  $50 \times 40$  см. Если идти вперед с чуть наклоненной к себе картонкой (рис.3), то над ее верхней кромкой возникнет восходящий воздушный поток. Ваша задача – посадить вращающийся Рот на гребень этой воздушной волны.

Перед запуском держите картонку перед собой в одной руке, а Большой Рот – в другой, вытянутой вверх (как показано на рисунке 2). Закрутите его легким движением и с картонкой в руках начните движение вперед, стараясь подхватить вращающийся Рот. Хорошо потренировавшись, вы научитесь пилотировать Большой Рот не только по прямой, но и осуществлять с ним повороты и передвигаться на большие расстояния.

Добавим еще, что пилотирование возможно только в замкнутых помещениях при отсутствии сквозняков и других воздушных потоков.

Подробное описание и демонстрацию полетов можно посмотреть по ссылке:

Big Mouth Tumblewing: Make and Fly: [https://www.youtube.com/watch?v=I1i\\_LMCvPX0](https://www.youtube.com/watch?v=I1i_LMCvPX0)

# О моментах инерции

А.БУРОВ

КАК ХОРОШО ИЗВЕСТНО ИЗ ФИЗИКИ, УСКОРЕНИЕ  $\vec{a}$  поступательно движущегося тела определяется действующей на него силой  $\vec{F}$ :

$$\vec{F} = m\vec{a},$$

где  $m$  – масса тела, являющаяся мерой его инертности. Аналогично, угловое ускорение  $\epsilon$  вращающегося относительно некоторой оси тела зависит от момента  $M$  приложенной к нему силы:

$$M = I\epsilon,$$

где  $I$  – момент инерции тела, представляющий собой меру инертности вращающегося тела.

Когда речь идет о материальной точке массой  $m$ , которая находится на расстоянии  $r$  от оси вращения, то ее момент инерции равен

$$I = mr^2.$$

Видно, что  $I$  зависит не только от самой массы, но и от того, насколько эта масса удалена от оси вращения.

Если число точек, образующих тело, конечно, то вычисление момента инерции проблемы не составляет: достаточно просуммировать моменты инерции всех точек:

$$I = \sum_{i=1}^N m_i r_i^2.$$

Другое дело, когда тело – сплошное. В этом случае для вычисления момента инерции надо, вообще говоря, уметь интегрировать, а это дело непростое. Спрашивается: нельзя ли найти хоть какие-то случаи, когда интегрирования можно избежать? Оказывается, примеры таких случаев существуют. Но прежде давайте посмотрим на размерность момента инерции, например точки:

$$[I] = [m][r]^2 = \text{кг} \cdot \text{м}^2.$$

Это обстоятельство подсказывает физику: если у изучаемого тела имеется лишь один характерный размер  $r$  и лишь один массовый параметр  $m$ , то для момента инерции можно записать

$$I = \alpha m r^2, \quad (1)$$

где  $\alpha$  – не имеющий размерности параметр, который нужно определить в каждом конкретном случае.

Для изучения конкретных примеров нам понадобится еще одно утверждение. Оно имеет вид теоремы.

**Теорема (Гюйгенса – Штейнера).** Момент инерции тела относительно оси  $l_Z$ , проходящей через точку  $Z$ , равен моменту инерции того же тела относительно параллельной ей оси  $l_O$ , проходящей через центр масс тела – точку  $O$ , сложенному с произведением массы

тела на квадрат расстояния  $r_{OZ}$  между этими осями:

$$I_Z = I_O + m r_{OZ}^2. \quad (2)$$

Эту теорему в механике обычно связывают с именами Х.Гюйгенса и Я.Штейнера (см., например, [3]). Однако иной раз соотношение (2) называют формулой Лагранжа (см. [2], [4], [5]).

Рассмотрим простейший пример того, как можно воспользоваться формулами (1) и (2) для нахождения моментов инерции твердых тел.

## Момент инерции палочки

**Задача 1.** Найдите момент инерции однородной палочки  $AB$  длиной  $a$  и массой  $m$  относительно оси  $l_O$ , проходящей через середину палочки – ее центр масс – и ей перпендикулярной (рис.1).



Рис. 1

**Решение.** Пусть требуемый момент инерции палочки определяется соотношением вида (1). Тогда ее момент инерции относительно оси  $l_A$ , параллельной оси  $l_O$  и проходящей через конец палочки – точку  $A$ , записывается так:

$$I_A = I_O + \frac{ma^2}{4} = ma^2 \left( \alpha + \frac{1}{4} \right).$$

С другой стороны, палочка составлена из двух половинок, масса каждой из которых  $m/2$ , а длина  $a/2$ . Момент инерции каждой из половинок относительно оси, проходящей через ее конец, равен

$$I_{1/2} = \frac{m}{2} \left( \frac{a}{2} \right)^2 \left( \alpha + \frac{1}{4} \right).$$

Поэтому для исходной палочки можно записать

$$I_O = 2I_{1/2},$$

или

$$\alpha ma^2 = 2 \frac{m}{2} \left( \frac{a}{2} \right)^2 \left( \alpha + \frac{1}{4} \right).$$

Отсюда получаем

$$\alpha = \frac{1}{12}, \quad I_O = \frac{ma^2}{12}.$$

А с помощью теоремы Гюйгенса–Штейнера тотчас найдем и  $I_A$ :

$$I_A = \frac{ma^2}{12} + \frac{ma^2}{4} = \frac{ma^2}{3}.$$

Эти соотношения хорошо известны (см., например, [1]).

Теперь мы можем просто искать моменты инерции фигур, составленных из палочек. Так, момент инерции составленного из

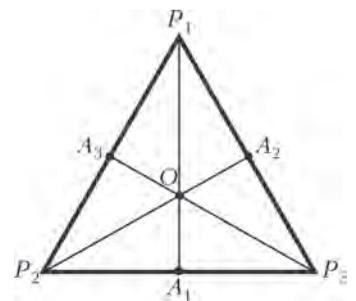


Рис. 2

одинаковых палочек длиной  $a$  правильного треугольника  $P_1P_2P_3$  массой  $m$  с серединами сторон  $A_i$  относительно оси, перпендикулярной плоскости треугольника и проходящей через его центр масс  $O$  (рис.2), имеет вид ( $I_{A_k}$  – момент инерции каждой из палочек относительно оси, ей перпендикулярной и проходящей через ее середину)

$$I_O = \sum_{k=1}^3 \left( I_{A_k} + \frac{m}{3} |OA_k|^2 \right) = 3 \left( \frac{m}{3} \frac{a^2}{12} + \frac{m}{3} \left( \frac{a\sqrt{3}}{3} \right)^2 \right) = \frac{5ma^2}{12}.$$

**Упражнения**

1. Найдите моменты инерции проволочных квадрата и правильного шестиугольника массой  $m$  со сторонами  $a$  относительно осей, перпендикулярных плоскостям этих фигур и проходящих через их середины.

2. Найдите момент инерции Г-образной фигуры массой  $m$ , образованной парой взаимно перпендикулярных однородных палочек длиной  $a$ , относительно оси, перпендикулярной ее плоскости и проходящей через ее центр масс.

**Исследовательское задание 1.** Для написания цифры в почтовом коде берется составленная из двух квадратов доминошка и проводятся некоторые линии вдоль сторон этих квадратов и их диагоналей (рис.3). Найдите центры масс «почтовых цифр», согнутых



Рис. 3

из однородной проволочки, и моменты инерции относительно осей, перпендикулярных их плоскостям и проходящих через их центры масс. (Ответ автору неизвестен.)

**Задача 2.** Найдите момент инерции однородного сплошного квадрата  $ABCD$  со стороной  $a$  и массой  $m$  относительно оси  $l_O$ , проходящей через середину квадрата – его центр масс – и перпендикулярной его плоскости.

**Решение.** Пусть требуемый момент инерции определяется соотношением вида (1):  $I_O = \alpha ma^2$ . Тогда момент инерции относительно оси  $l_A$ , параллельной оси  $l_O$  и проходящей через вершину квадрата – точку  $A$ , имеет вид

$$I_A = I_O + \frac{ma^2}{2} = ma^2 \left( \alpha + \frac{1}{2} \right).$$

С другой стороны, квадрат составлен из четырех квадратных четвертинок, масса каждой из которых  $m/4$ , а длина стороны  $a/2$ . Момент инерции каждой из четвертинок относительно оси, проходящей через ее вершину, составляет

$$I_{1/4} = \frac{m}{4} \left( \frac{a}{2} \right)^2 \left( \alpha + \frac{1}{2} \right).$$

Но исходный квадрат состоит из четырех таких четвертинок, поэтому

$$I_O = 4I_{1/4}.$$

Подставляя в это равенство выражения для  $I_O$  и  $I_{1/4}$ , имеем

$$\alpha ma^2 = 4 \frac{m}{4} \left( \frac{a}{2} \right)^2 \left( \alpha + \frac{1}{2} \right),$$

откуда получаем

$$\alpha = \frac{1}{6}, \quad I_O = \frac{ma^2}{6}.$$

А с помощью теоремы Гюйгенса–Штейнера тотчас находим и  $I_A$ :

$$I_A = \frac{ma^2}{6} + \frac{ma^2}{2} = \frac{2ma^2}{3}.$$

**Упражнение 3.** Найдите момент инерции однородного сплошного правильного треугольника  $ABC$  со стороной  $a$  и массой  $m$  относительно оси  $l_O$ , проходящей через его центр масс и перпендикулярной его плоскости.

*Указание.* Проведите средние линии треугольника и адаптируйте к получившимся четырем равным треугольникам вдвое меньшего размера рассуждения, применявшиеся к квадрату.

**Моменты инерции кольца и круга**

Конечно, проще всего найти момент инерции окружности радиусом  $R$  и массой  $m$ , согнутой из тонкой проволочки, относительно оси, проходящей через центр окружности и перпендикулярной ее плоскости. Так как все точки, образующие окружность, одинаково удалены от ее центра, то их вклады в момент инерции также оказываются одинаковыми. Таким образом,

$$I_O = mR^2. \tag{3}$$

Для однородного круга сделать похожий вывод уже не получается. Вновь обратимся к формуле (1) и будем считать, что момент инерции круга записывается так:

$$I_O = \alpha m R^2 = \alpha \rho \pi R^4,$$

где  $\rho$  – плотность материала, из которого сделан круг, т.е. масса, приходящаяся на единицу площади. Для кругового кольца той же плотности с внутренним радиусом  $R_1$  и внешним радиусом  $R_2$  имеем

$$I_O = \alpha \rho \pi (R_2^4 - R_1^4),$$

или

$$I_O = \alpha m (R_1^2 + R_2^2), \text{ где } m = \rho \pi (R_2^2 - R_1^2).$$

Пусть теперь  $R_1 = R$ ,  $R_2 = R + \Delta R$ . Тогда

$$\Delta I_O = \alpha \rho \pi ((R + \Delta R)^4 - R^4) = \alpha \rho \pi R^4 ((1 + \epsilon)^4 - 1),$$

где  $\epsilon = \Delta R/R$ .

Если кольцо тонкое ( $\epsilon \ll 1$ ), то

$$\Delta I_O = 4\alpha \rho \pi \epsilon R^4 = 4\alpha \rho \pi R^3 \Delta R = 2\alpha \Delta m R^2, \tag{4}$$

где

$$\begin{aligned} \Delta m &= \rho \pi ((R + \Delta R)^2 - R^2) = 2\rho \pi R^2 ((1 + \epsilon)^2 - 1) = \\ &= \rho \cdot 2\pi R^2 \epsilon = \rho \cdot 2\pi R \Delta R \end{aligned}$$

– масса тонкого кольца. Сопоставляя соотношения (3) и (4), находим, что  $\alpha = 1/2$ . Тогда для круга массой  $m$  получаем

$$I_O = \frac{mR^2}{2}.$$

Завершая этот раздел, укажем, что момент инерции кольца конечной толщины имеет вид

$$I_O = \frac{m(R_1^2 + R_2^2)}{2}.$$

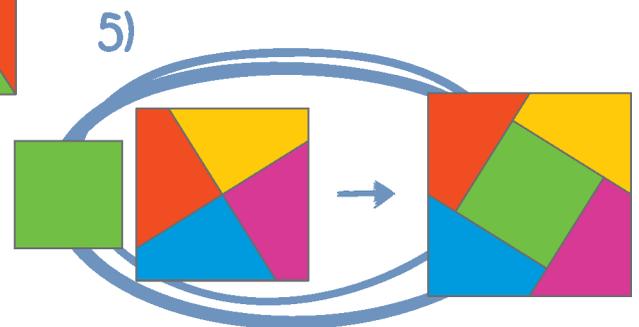
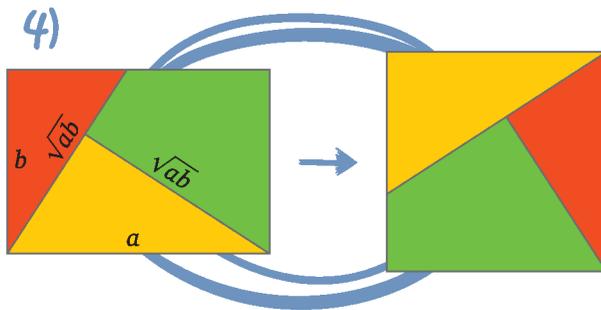
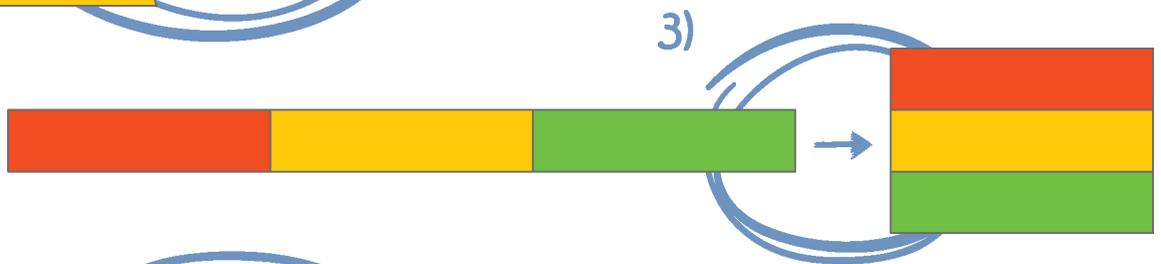
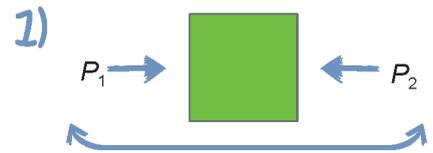
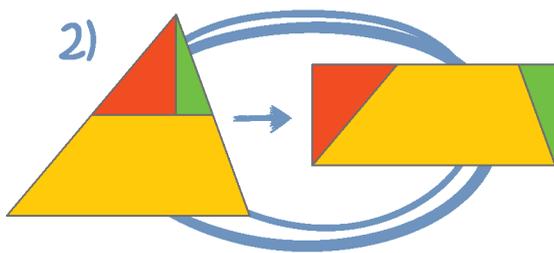
*Замечание.* Честно говоря, мы тут немного схитрили, фактически заменив необходимое для вычисления момента интегрирование дифференцированием, с помощью которого и был осуществлен подбор коэффициента  $\alpha$ .

(Продолжение см. на с. 34)

# Равновеликость и равноставленность

**Теорема (Бойаи–Гервин).** Любые два равновеликих многоугольника на плоскости равноставлены.  
Основная идея доказательства: каждый из многоугольников свести к равновеликому (равному по площади) квадрату (1).

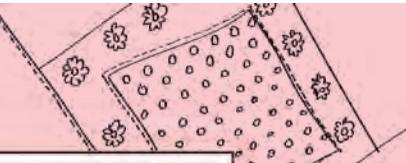
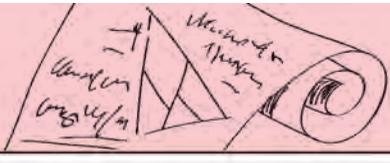
*Шаги.* Любой многоугольник можно разбить на треугольники (докажите!). Каждый треугольник можно разбить на части, из которых складывается «не очень вытянутый» прямоугольник (2–3), а затем квадрат (4). Несколько квадратов всегда можно перекроить в один квадрат (5).



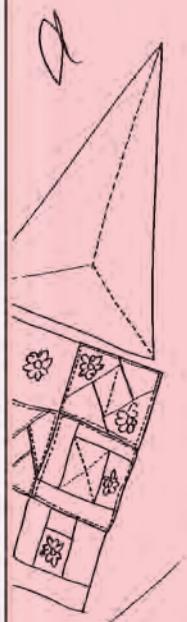
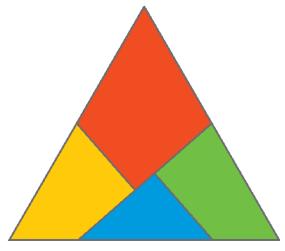
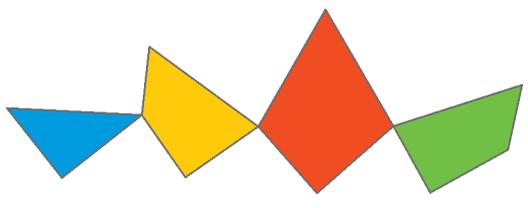
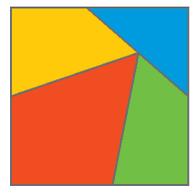
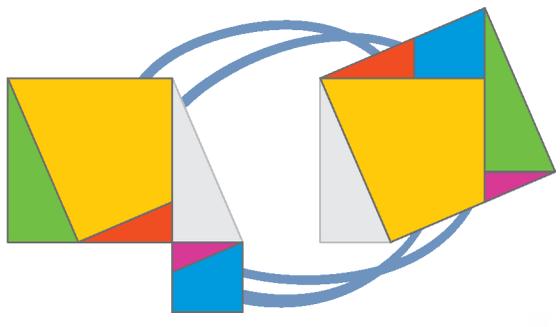
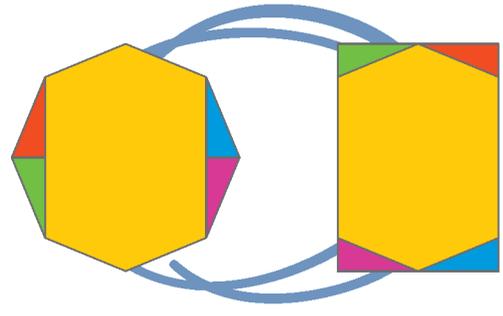
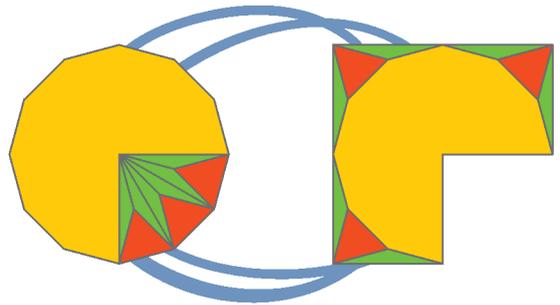
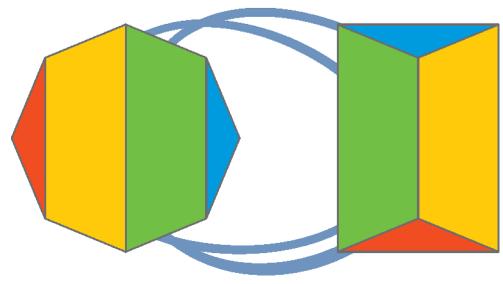
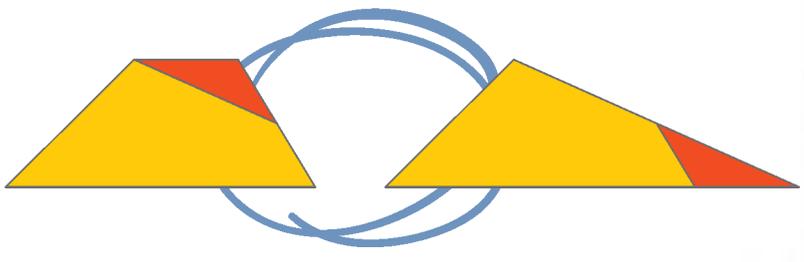
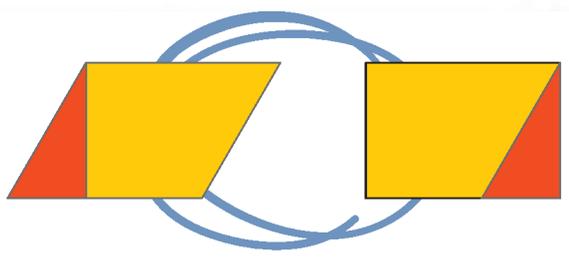
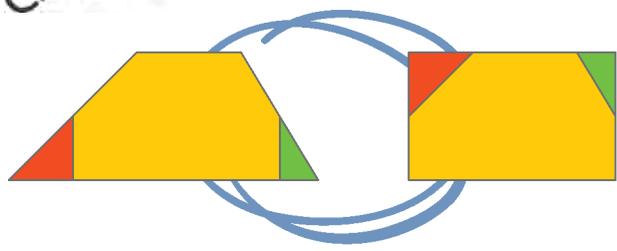
## Литература

- В.Г.Болтянский. Равновеликие и равноставленные фигуры. – М.: Гостехиздат, 1956.  
В.Ф.Каган. О преобразовании многогранников. – Одесса: Mathesis, 1913.  
Д.Фукс. Можно ли из тетраэдра сделать куб? – Журнал «Квант», 1990, №11.  
[Приведено другое доказательство теоремы Бойаи–Гервина].  
Г.Линдгрэн. Занимательные задачи на разрезание. – М.: Мир, 1977.  
Журнал «Квант». – 1980, №6, 4-я страница обложки.  
В.Литцман. Теорема Пифагора. – Одесса: Mathesis, 1912.  
Математические этюды, <http://etudes.ru>

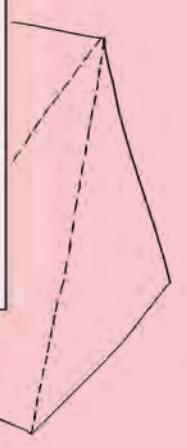
Vab



Смотри!



$+1) + 2) + 3)$



Материал подготовил Н.Андреев

20

Vab

(Начало см. на с. 30)

Главное оправдание этому очевидно – дифференцировать все же проще, чем интегрировать!

### Радиус инерции

Механики давно подметили, что зачастую для описания инерционных свойств, связанных с вращательным движением, удобнее использовать не момент инерции, а радиус инерции тела

$$R_* = \sqrt{\frac{I_O}{m}}.$$

Так, для тонкого однородного кольца радиусом  $R$  имеем  $R_* = R$ . Иными словами, понятие радиуса инерции позволяет ответить на вопрос, на кольцо какого радиуса  $R_*$  надо равномерно «намазать» массу  $m$ , чтобы во вращательном движении тело демонстрировало такие же инерционные свойства, как и указанное кольцо. Согласно доказанному в предыдущем разделе, для тонкого однородного круга радиусом  $R$  радиус инерции составляет  $R_* = R/\sqrt{2}$ .

Заметим, что для однородных тел радиус инерции «совершенно геометричен»: он никак не зависит от плотности и массы тела.

Если радиус инерции тела каким-либо образом найден, то рецепт нахождения соответствующего момента инерции несложен: «просто возведи в квадрат и умножь на массу». Иными словами,

$$I_O = mR_*^2.$$

### Выход в пространство

Прежде чем идти в пространство, рассмотрим следующую плоскую задачу.

**Задача 3.** Найдите момент инерции однородного тонкого листа бумаги размером  $a \times b$  и массой  $m$  относительно оси  $l$ , совпадающей с его краем длины  $b$ .

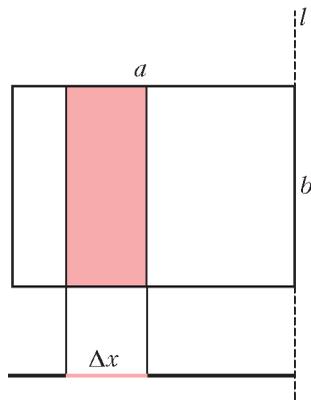


Рис. 4

**Решение.** Разместим однородную тонкую палочку той же массы  $m$  и длины  $a$  ровно под стороной длины  $a$  изучаемого прямоугольного листа (рис.4). Тогда один из концов палочки окажется на оси  $l$ . Нетрудно видеть, что пара прямых, параллельных оси  $l$ , высекает как из листа, так и из палочки куски одинаковой массы. Отсюда, в силу определения момента инерции, немедленно следует равенство момента инерции листа и момента инерции палочки относительно оси  $l$ . Он составляет

$$I_l = \frac{ma^2}{3}.$$

Такие же рассуждения позволяют найти момент инерции того же листа относительно средней линии, параллельной его краю длины  $b$ . В этом случае имеем

$$I_b = \frac{ma^2}{12}.$$

Примечательно, что ни в ту, ни в другую формулу не входит величина  $b$ . Кроме того, понятно, что момент инерции того же листа относительно средней линии, параллельной его краю длины  $a$ , составляет

$$I_a = \frac{mb^2}{12}.$$

Конечно, теперь было бы естественно посчитать момент инерции  $I_z$  относительно оси, перпендикулярной плоскости прямоугольного листа и проходящей через его середину. Чтобы это сделать, воспользуемся следующим замечанием (теоремой о взаимно перпендикулярных осях). Пусть  $xyz$  – прямоугольная система координат. Тогда для множества точек с массами  $m_i$ , располагающихся в плоскости  $xy$ , моменты инерции относительно осей  $x$ ,  $y$  и  $z$  имеют вид

$$I_x = \sum_i m_i y_i^2, \quad I_y = \sum_i m_i x_i^2, \quad I_z = \sum_i m_i (x_i^2 + y_i^2),$$

т.е.

$$I_z = I_x + I_y.$$

Для нашего прямоугольника получаем

$$I_z = \frac{m}{12}(a^2 + b^2).$$

Полагая  $a = b$ , приходим к найденному ранее иным способом соотношению для момента инерции квадрата.

Точно такие же рассуждения оказываются применимыми и при вычислении моментов инерции параллелепипеда массой  $m$  и размером  $a \times b \times c$ . Предоставим возможность читателю самостоятельно убедиться в том, что момент инерции относительно оси симметрии параллелепипеда  $l_c$ , параллельной ребру длины  $c$ ,  $(a, b, c)$ , составляет

$$I_c = \frac{m}{12}(a^2 + b^2), \quad (a, b, c),$$

где запись  $(a, b, c)$  обозначает циклическую перестановку соответствующих символов.

Заметим также, что аналогичным образом можно вычислить момент инерции однородного, сплошного, прямого, не обязательно кругового цилиндра относительно какой-либо оси, параллельной его образующим. Этот момент инерции находится ровно по тем же формулам, что и для его сечений, и совсем не зависит от высоты. Так, для прямого кругового цилиндра массой  $m$  и радиусом  $R$  момент инерции относительно его оси составляет  $mR^2/2$ .

**Упражнение 4.** Дан равногранный тетраэдр с ребрами длиной  $a$ ,  $b$  и  $c$ , в вершинах которого расположены одинаковые массы  $m$ . Найдите его моменты инерции относительно осей, проходящих через середины скрещивающихся ребер.

**Исследовательское задание 2.** Равногранный тетраэдр массой  $m$  с ребрами длиной  $a$ ,  $b$  и  $c$  составлен из однородных, одинаковых по плотности проволочек. Найдите его моменты инерции относительно осей, проходящих через середины скрещивающихся ребер.

Далее, нетрудно убедиться в том, что справедливо такое утверждение.

**Утверждение 1.** Если тела  $Q_1$  и  $Q_2$  получают друг из друга винтовым движением с осью винта  $l$ , то их моменты инерции относительно оси  $l$  одинаковы.

Это утверждение можно применить к вычислению момента инерции винтовой линии массой  $m$ , полученной

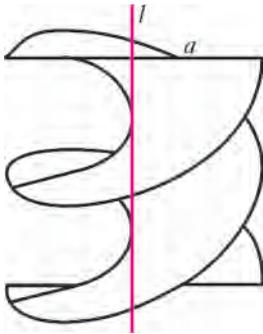


Рис. 5



Рис. 6

винтовым перемещением отрезка длиной  $a$  относительно оси винта  $l$ , перпендикулярной отрезку и проходящей через его середину (рис.5). С его же помощью можно найти момент инерции для «скрученного кубарика» (рис.6) – стопки квадратных бумажек для заметок, перекрученных вокруг оси, проходящей через центры квадратов, а также для винтовой лестницы с прямоугольными ступеньками, насаженными на ось, проходящую через вершины квадратов. Предлагаем читателю самостоятельно провести соответствующие вычисления.

Может оказаться полезным и еще одно утверждение.

**Утверждение 2.** Если однородные тела  $Q_1$  и  $Q_2$  таковы, что моменты инерции относительно оси  $l$  всех их сечений, перпендикулярных данной оси, совпадают, то совпадают и моменты инерции самих тел относительно этой же оси.

**Задача 4.** Найдите момент инерции бумажного кулька массой  $m$ , высотой  $h$  и радиусом в основании  $R$  относительно его оси. Под бумажным кульком понимается боковая поверхность прямого кругового конуса.

**Решение.** Бумага, из которой сделан кулек, тонкая, что несколько затрудняет решение задачи. Немного схитрим: возьмем много-много таких кулек и наденем один на другой. Получится фигура, похожая на «ракету», этакий «толстый кулек», разрез которой вдоль оси симметрии изображен на рисунке 7. Если мысленно отрезать «верхушку» ракеты и разместить отрезанную часть вместо «сопла», то момент инерции тела относительно его оси не изменится. А получившееся тело – не что иное, как однородный сплошной цилиндр. Его момент инерции относительно оси симметрии хорошо известен, он не зависит от высоты цилиндра (а вместе с ней – и от толщины «толстого кулька») и составляет  $mR^2/2$ . Ответ задачи получен.

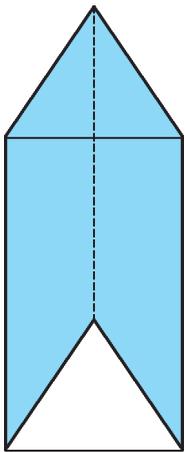


Рис. 7

**Сфера и шар**

Удивительный успех в деле отыскания моментов инерции окружности и круга неумолимо подвигает на подобные изыскания для сферы и шара.

Рассмотрим сферу массой  $m$  и радиусом  $R$  с центром в точке  $O$ . Из соображений симметрии ясно, что момент инерции будет одним и тем же для любой оси, проходящей через центр сферы. Воспользуемся правой ортогональной системой координат  $xuz$  с центром в точке  $O$ . Моменты

инерции относительно ее осей имеют вид

$$I_x = \sum_i m_i (y_i^2 + z_i^2), \quad I_y = \sum_i m_i (z_i^2 + x_i^2), \\ I_z = \sum_i m_i (x_i^2 + y_i^2).$$

Складывая эти соотношения, находим

$$I_x + I_y + I_z = 2 \sum_i m_i (x_i^2 + y_i^2 + z_i^2).$$

Выражение в правой части – момент инерции системы относительно точки  $O$  (это понятие малоупотребимо в механике). Так как вся масса сосредоточена на сфере, правая часть этого выражения равна  $2mR^2$ , откуда получаем, что искомый момент инерции равен

$$I = \frac{2mR^2}{3}.$$

Тогда радиус инерции однородной сферы относительно оси, проходящей через ее центр, имеет вид

$$R_* = \sqrt{\frac{2}{3}} R.$$

Опираясь на эту формулу и на аналог процедуры, примененной при вычислении момента инерции круга, попробуем найти радиус инерции однородного шара относительно оси, проходящей через его центр. Пусть

$$R_* = \beta R,$$

где  $R$  – радиус шара. Тогда если  $\rho$  – плотность шара, то

$$I_z = \frac{4}{3} \pi \rho \beta^2 R^5, \quad m = \frac{4}{3} \pi \rho R^3,$$

и для шарового слоя, расположенного между сферами радиусов  $R_1$  и  $R_2$  ( $R_2 > R_1$ ), имеем

$$I_z = \frac{4}{3} \pi \rho \beta^2 (R_2^5 - R_1^5), \quad m = \frac{4}{3} \pi \rho (R_2^3 - R_1^3),$$

$$R_*^2 = \frac{I_z}{m} = \beta^2 \frac{R_2^5 - R_1^5}{R_2^3 - R_1^3}.$$

Устремляя  $R_1$  к  $R_2 = R$ , в пределе получаем

$$R_*^2 = \beta^2 \cdot \frac{5}{3} R^2.$$

Сопоставляя это равенство с выражением  $R_* = \sqrt{\frac{2}{3}} R$  для однородной сферы, находим

$$\beta = \sqrt{\frac{2}{5}}, \quad I_z = \frac{2mR^2}{5}.$$

Так нам опять удалось обойтись без интегрирования!

**Литература**

1. А.К.Кикоин. Вращательное движение тел («Квант», 1971, №1).
2. В.Н.Дубровский. Момент инерции в геометрии («Квант», 1984, №7).
3. Н.Г.Четаев. Теоретическая механика (М.: Наука, 1987).
4. М.Б.Балк, Н.А.Григорьев. Механика помогает геометрии («Квант», 1973, №11).
5. М.Б. Балк, В.Г.Болтянский. Геометрия масс (Библиотечка «Квант», вып. 61).
6. М.М.Гернет, В.Ф.Ратобильский. Определение моментов инерции (М.: Машиностроение, 1969).

# Лемма биссектрального треугольника

А.КАРЛЮЧЕНКО, Г.ФИЛИППОВСКИЙ

ПУСТЬ ОТРЕЗКИ  $AL_1, BL_2, CL_3$  ЯВЛЯЮТСЯ БИСЕКТРИСАМИ В ПРОИЗВОЛЬНОМ ТРЕУГОЛЬНИКЕ  $ABC$ . ТОГДА ТРЕУГОЛЬНИК  $L_1L_2L_3$ , СОСТАВЛЕННЫЙ ИЗ ОСНОВАНИЙ БИСЕКТРИС, НАЗЫВАЮТ **БИСЕКТРАЛЬНЫМ**. БИСЕКТРАЛЬНЫЙ ТРЕУГОЛЬНИК ОБЛАДАЕТ РЯДОМ СВОЙСТВ, СРЕДИ КОТОРЫХ ОСОБЕННО ВАЖНЫМ ПРЕДСТАВЛЯЕТСЯ ТО, О КОТОРОМ МЫ И ПОВЕДЕМ ДАЛЬНЕЙШИЙ РАЗГОВОР...

**Лемма биссектрального треугольника.** Для любой точки на стороне  $L_2L_3$  биссектрального треугольника сумма расстояний от этой точки до прямых  $AB$  и  $AC$  равна расстоянию от нее до прямой  $BC$ .

**Доказательство.** Пусть  $T$  – произвольная точка стороны  $L_2L_3$  биссектрального треугольника. Пусть  $TT_1 = x$ ,  $TT_2 = y$ ,  $TT_3 = z$  – ее расстояния до сторон  $BC, AC$  и  $AB$  соответственно (рис.1). Докажем, что  $x = y + z$ .

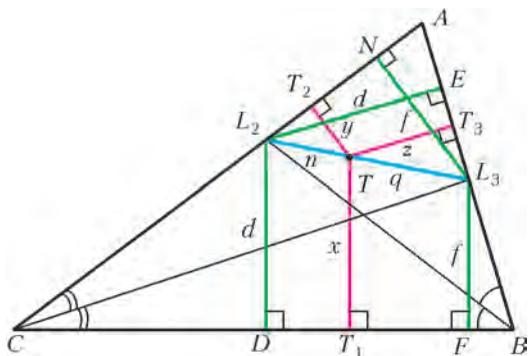


Рис. 1

Обозначим через  $L_2D = L_2E = d$  – расстояния от  $L_2$  до  $BC$  и  $AB$  соответственно и через  $L_3F = L_3N = f$  – расстояния от  $L_3$  до  $BC$  и  $AC$  соответственно. Пусть также  $L_2T = n$  и  $L_3T = q$ . Величину отрезка  $x$  нетрудно найти из трапеции  $L_2L_3FD$ :

$$x = \frac{dq + fn}{n + q}.$$

Из подобия треугольников  $L_2TT_2$  и  $L_2L_3N$  имеем

$$\frac{y}{n} = \frac{f}{n + q}, \text{ или } y = \frac{fn}{n + q}.$$

Аналогично,

$$\frac{z}{d} = \frac{q}{n + q}, \text{ или } z = \frac{dq}{n + q}$$

– из подобия треугольников  $L_3TT_3$  и  $L_3L_2E$ . Сравнив эти равенства, получаем  $x = y + z$ .

**Замечание.** Отметим, что если точка  $T$  будет взята на продолжении  $L_2L_3$  (за точку  $L_3$ ), то будет иметь место

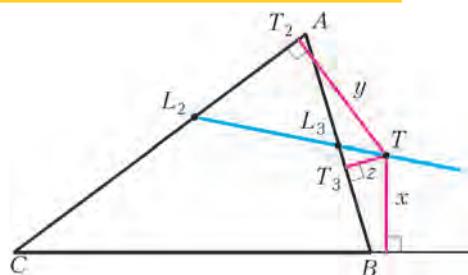


Рис. 2

равенство  $y = x + z$  – рисунок 2. Аналогично, если  $T$  – на продолжении  $L_2L_3$  за точку  $L_2$ , то  $z = x + y$ .

Покажем применение леммы при решении ряда задач, большей частью повышенной трудности, олимпиадных.

**Задача 1.** Прямая  $L_2L_3$  пересекает прямую  $BC$  в точке  $Q$  – основании внешней биссектрисы угла  $A$  треугольника  $ABC$ . Докажите!

**Доказательство** (Д.Прокопенко). Соединим  $A$  с  $Q$  и проведем из точки  $Q$  перпендикуляры к прямым  $AC$  и  $AB$ :  $QN = y$ ;  $QF = z$  (рис.3). Согласно замечанию к лемме (см. рис.2),  $y = x + z$ . Но  $x = 0$ , следовательно,  $y = z$ . Тогда из равенства треугольников  $AFQ$  и  $ANQ$  (по катету и

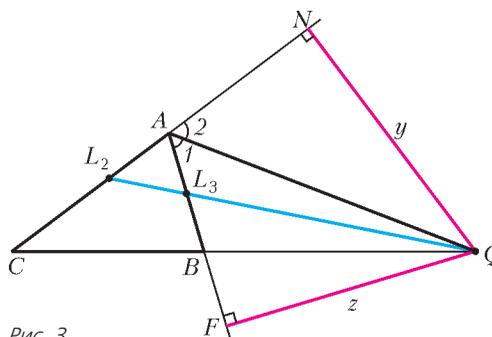


Рис. 3

гипотенузе) следует, что  $\angle 1 = \angle 2$ , т.е.  $AQ$  – внешняя биссектриса угла  $A$  треугольника  $ABC$ .

**Задача 2** (А.Карлюченко). Внутри треугольника  $ABC$  находится точка  $T$ , расстояния от которой до сторон  $BC, AC$  и  $AB$  равны  $x, y, z$  соответственно. Найдите геометрическое место точек  $T$  таких, что из отрезков  $x, y, z$  можно составить треугольник.

**Решение.** Искомым ГМТ будет внутренняя область треугольника  $L_1L_2L_3$  (рис.4). Действительно, для всех точек на сторонах треугольника  $L_1L_2L_3$  будет выполняться свойство: один отрезок равен сумме двух других. Стало быть, треугольник составить нельзя. Для всех точек вне треугольника  $L_1L_2L_3$  один отрезок будет длиннее, чем сумма двух других (докажите!). Внутри же треугольника  $L_1L_2L_3$  требование задачи выполняется.

**Задача 3.** Биссектриса  $AL_1$  треугольника  $ABC$  пересекает отрезок  $L_2L_3$  в точке  $T$ . Через  $T$  проведена прямая параллельно  $BC$ . Она пересекает  $AB$  и  $AC$  в точ-

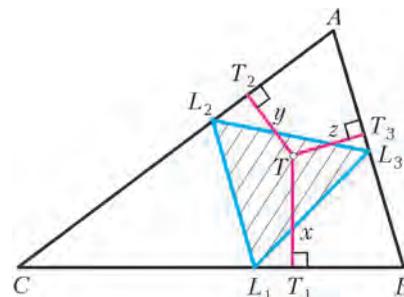


Рис. 4

как  $K$  и  $N$  соответственно. Докажите, что  $2KN = BK + CN$ .

**Доказательство.** Так как  $T \in L_2L_3$ , то, согласно лемме,  $x = y + z$  (рис.5). Но  $T$  также принадлежит биссектрисе

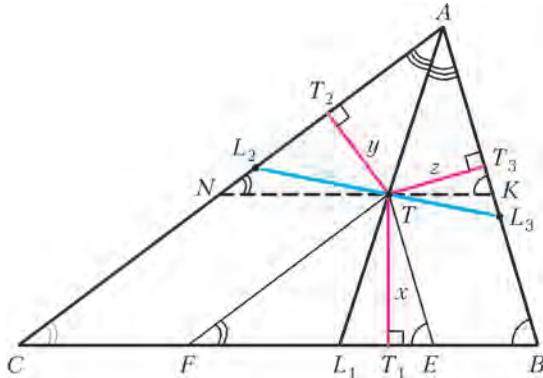


Рис. 5

$AL_1$ . Поэтому  $y = z$  и  $x = 2y$ , или  $x = 2z$ . Проведем  $TE \parallel AB$  и  $TF \parallel AC$ . Тогда  $TE = KB$  ( $TKBE$  – параллелограмм). Аналогично,  $TF = NC$ . Поскольку  $\Delta TT_3K \sim \Delta TT_1E$ , то  $\frac{z}{x} = \frac{TK}{TE} = \frac{1}{2}$ , откуда  $2TK = TE = KB$ . Аналогично,  $2TN = TF = NC$  (из подобия треугольников  $TT_2N$  и  $TT_1F$ ). Следовательно,  $2KN = BK + CN$ , что и требовалось доказать.

**Задача 4** (А.Карлюченко). Окружность с центром  $I$ , вписанная в треугольник  $ABC$ , касается его сторон  $BC$ ,  $AC$  и  $AB$  в точках  $K_1, K_2, K_3$  соответственно. Луч  $K_1I$  пересекает  $L_2L_3$  в точке  $T$ . Из точки  $T$  проведены перпендикуляры  $TF$  к  $IK_2$  и  $TD$  к  $IK_3$ . Докажите, что  $ID + IF + IT = IK_1$ .

**Доказательство.** Согласно лемме,  $TK_1 = TT_2 + TT_3$ , или  $x = y + z$ . Поскольку  $IK_1 = IK_2 = IK_3 = r$ , то имеем  $IT = x - r$ ,  $IF = r - y$  и  $ID = r - z$  (рис.6). Тогда  $ID + IF + IT = r - z + r - y + x - r = r + (x - y - z) = r$ .

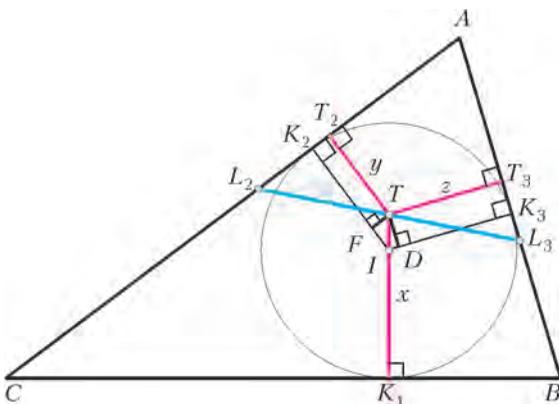


Рис. 6

**Задача 5** (Р.Козарев, Национальная олимпиада Болгарии, 1997). Около треугольника  $ABC$  описана окружность  $\omega$ . Луч  $L_2L_3$  пересекает  $\omega$  в точке  $T$ . Докажите,

что  $\frac{1}{TB} = \frac{1}{TA} + \frac{1}{TC}$ .

**Доказательство.** Так как точка  $T$  лежит на продолжении  $L_2L_3$  за точку  $L_3$ , то, согласно лемме, имеем  $y = x + z$  (рис.7). Четырехугольник  $ATBC$  вписан в  $\omega$ ,

поэтому  $\angle TAT_2 = \angle TBT_1$ . Следовательно,

$$\Delta TBT_1 \sim \Delta TAT_2, \text{ и } \frac{x}{TB} = \frac{y}{TA}. \quad (1)$$

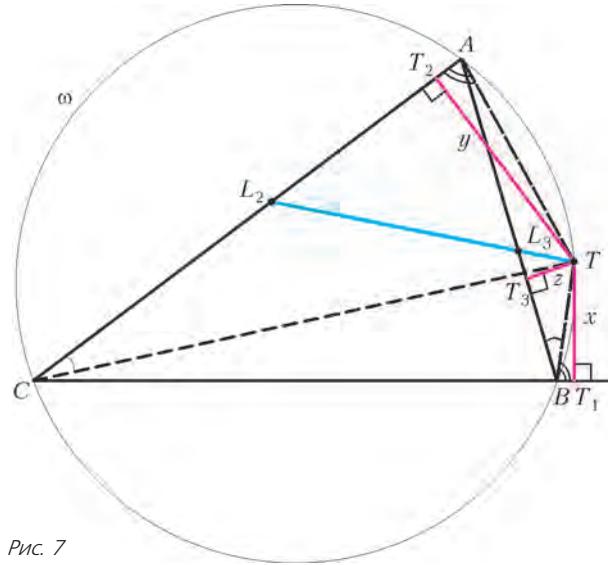


Рис. 7

Поскольку  $\angle TBA = \angle TCA$  (вписанные, опираются на одну дугу в окружности  $\omega$ ), то  $\Delta TBT_3 \sim \Delta TCT_2$ . Значит,

$$\frac{z}{TB} = \frac{y}{TC}. \quad (2)$$

Сложив левые и правые части равенств (1) и (2), получим  $\frac{x+z}{TB} = \frac{y}{TA} + \frac{y}{TC}$ . Однако  $x + z = y$ . Тогда, сократив на  $y$ , получим требуемое:  $\frac{1}{TB} = \frac{1}{TA} + \frac{1}{TC}$ .

**Задача 6.** На отрезке  $L_2L_3$  найдите точку  $T$  такую, чтобы отношение  $\frac{yz}{x^2}$  принимало наибольшее значение.

**Решение.** Для любой точки  $T$  отрезка  $L_2L_3$  выполняется равенство  $x = y + z$  (согласно лемме). Тогда необходимо найти наибольшее значение величины  $\frac{yz}{(y+z)^2}$ . Нетрудно

показать, что  $(y+z)^2 \geq 4yz$ , откуда  $\frac{yz}{(y+z)^2} \leq \frac{1}{4}$ . Знак

равенства достигается, когда  $y = z$ . Поэтому  $\left(\frac{yz}{x^2}\right)_{\max}$

имеет место для точки  $T$  пересечения биссектрисы  $AL_1$  с отрезком  $L_2L_3$  (рис.8).

**Задача 7.** Известно, что в треугольнике  $ABC$  центроид (точка пересечения медиан)  $M$  принадлежит отрезку  $L_2L_3$ . До-

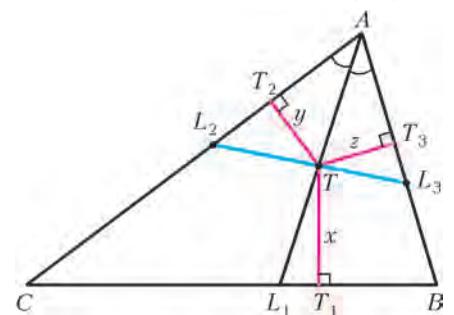


Рис. 8

кажите, что в таком случае для высот треугольника  $ABC$  имеет место равенство  $h_a = h_b + h_c$ .

**Доказательство.** Так как  $M \in L_2L_3$ , то  $x = y + z$  (согласно лемме). Центроид  $M$  делит каждую из медиан

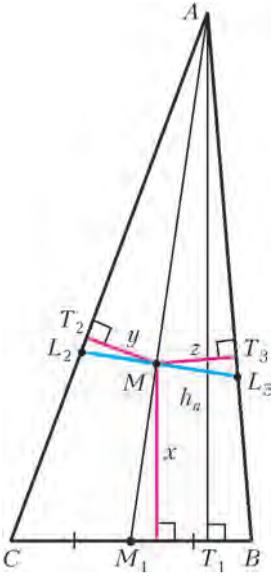


Рис. 9

в отношении 2:1, считая от вершины. Поэтому  $x = \frac{1}{3}h_a$  (рис.9). Аналогично,  $y = \frac{1}{3}h_b$ ,  $z = \frac{1}{3}h_c$ . Тогда, с учетом леммы,  $\frac{1}{3}h_a = \frac{1}{3}h_b + \frac{1}{3}h_c$ , или  $h_a = h_b + h_c$ .

**Задача 8.** Центр  $O$  описанной около треугольника  $ABC$  окружности лежит на отрезке  $L_2L_3$ . Докажите, что расстояние  $AH$  от вершины до ортоцентра треугольника  $ABC$  равно сумме радиусов описанной около треугольника  $ABC$  и вписанной в него окружностей.

**Доказательство.** Согласно лемме, имеем  $OM_1 = OM_2 + OM_3$ , или  $x = y + z$  (рис.10). Здесь  $O$  – центр описанной окружности треугольника  $ABC$ , а  $M_1, M_2, M_3$  – середины его сторон. Треугольник  $ABC$  – остроугольный, так как  $O \in L_2L_3$  находится внутри него. Тогда по формуле Карно для остроугольного треугольника  $ABC$   $OM_1 + OM_2 + OM_3 = R + r$ . С учетом леммы ( $OM_1 = OM_2 + OM_3$ ) получаем  $2OM_1 = R + r$ . Поскольку  $2OM_1 = AH$  (известная формула геометрии треугольника), то  $AH = R + r$ , что и требовалось доказать.

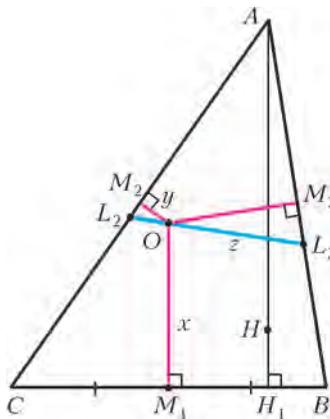


Рис. 10

**Задача 9** (А.Карлюченко). Восстановите треугольник  $ABC$  по точкам  $B, L_2, Q$ , где  $Q = L_2L_3 \cap BC$ .

**Решение.** Соединим  $L_2$  с  $B$  и  $Q$ . Проведем прямую  $QB$ , которая, очевидно, содержит сторону  $BC$  треугольника  $ABC$ . При этом  $\angle 1 = \frac{\angle B}{2}$  (рис.11). Построив  $\angle 2 = \angle 1$ ,

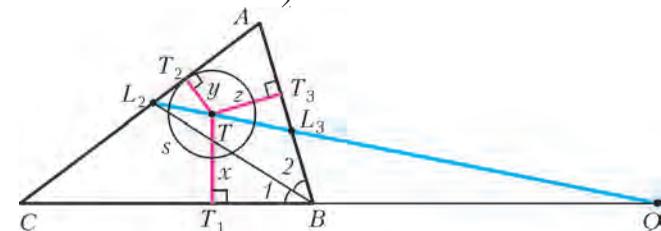


Рис. 11

получим прямую, содержащую сторону  $BA$ . Эта прямая пересекает  $L_2Q$  в точке  $L_3$ . Из любой точки  $T$  отрезка  $L_2L_3$  проведем перпендикуляры  $TT_1 = x$  и  $TT_3 = z$  к прямым, содержащим  $BC$  и  $BA$  соответственно. Согласно лемме,  $y = x - z$ . Из точки  $T$  как из центра проводим окружность  $s$  радиусом  $y = x - z$ . Касательная к  $s$  из точки

$L_2$  при продолжении пересечет прямые  $BA$  и  $QB$  в вершинах  $A$  и  $C$  соответственно.

**Задача 10** (А.Карлюченко). В треугольнике  $ABC$  с углом  $\angle A = 60^\circ$  расстояние от  $L_2$  до  $BC$  меньше чем  $AL_2$  ( $L_2D = L_2E$  и  $L_2E < AL_2$  – катет меньше гипотенузы). Аналогично, расстояние от  $L_3$  до  $BC$  меньше чем  $AL_3$ , поскольку  $L_3K = L_3N < AL_3$  (рис.12). Значит ли

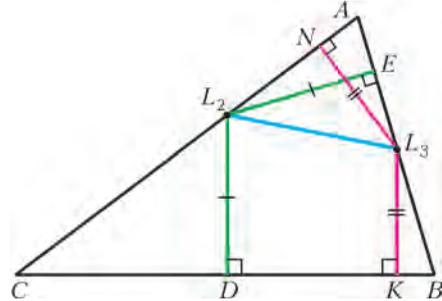


Рис. 12

это, что на отрезке  $L_2L_3$  не найдется такой точки  $T$ , для которой расстояние от нее до  $BC$  равно  $AT$ ?

**Решение.** Проведем биссектрису  $AL_1$  угла  $A$ . Покажем, что точка ее пересечения с  $L_2L_3$  и есть искомая точка  $T$  (рис.13). Действительно,  $x = y + z$  (согласно лемме) и

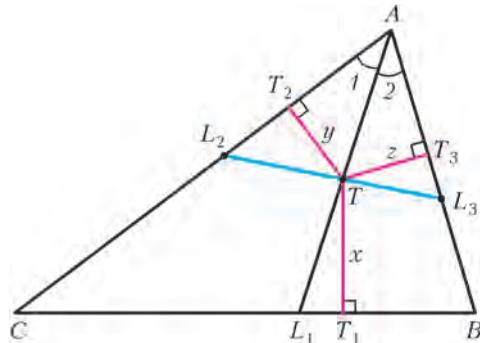


Рис. 13

$y = z$ , так как  $T \in AL_1$ . Значит,  $y = z = \frac{x}{2}$ . Поскольку  $\angle 1 = \angle 2 = 30^\circ$ , то гипотенуза  $AT$  в треугольнике равна  $2y = x$ . Итак, в данной конструкции  $AT = TT_1 = x$ .

В заключение статьи предлагаем несколько задач для самостоятельного решения.

**Задачи**

**11** (А.Карлюченко). Восстановите треугольник  $ABC$  по вершинам  $A, B$  и точке  $T$  пересечения биссектрисы угла  $A$  с отрезком  $L_2L_3$ .

**12** (А.Карлюченко, VIII Олимпиада имени И.Ф.Шарыгина). Восстановите треугольник  $ABC$  по точкам  $A, L_2, L_3$ .

**13.** Биссектриса  $AL_1$  треугольника  $ABC$  пересекает  $L_2L_3$  в точке  $T$ . Докажите, что  $AT : TL_1 = (AB + AC) : 2BC$ .

**14.** В треугольнике  $ABC$  прямая, проходящая через центры его описанной и вписанной окружностей, параллельна стороне  $BC$ . Докажите, что  $L_2L_3$  делит пополам высоту, проведенную из вершины  $A$ .

**15.** Центр  $O$  описанной около треугольника  $ABC$  окружности лежит на отрезке  $L_2L_3$ . Докажите, что  $r_a = R$ , где  $r_a$  – радиус вневписанной окружности треугольника  $ABC$ , касающейся стороны  $BC$ .

# Задача Анджанса о 32 клетках

Д. КУЗНЕЦОВ

В этой статье речь пойдет о следующей задаче.

**Задача.** Клетки шахматной доски  $8 \times 8$  занумерованы числами от 1 до 32 так, что каждое число использовано дважды. Докажите, что можно выбрать 32 клетки, занумерованные разными числами, так, что на каждой вертикали и каждой горизонтали найдется хотя бы по одной выбранной клетке.

Ее предложил в 1986 году на VIII Турнире городов Агнис Анджанс. У задачи оказалось такое количество красивых решений, что она по праву заняла достойное место в олимпиадной математике. При этом в зависимости от решения можно сделать несколько различных утверждений, усиливающих исходный вариант задачи.

С какого же решения начать? Пожалуй, с наиболее естественного: попробуем выбирать клетки с разными номерами одну за другой «жадным» алгоритмом, задействуя, по возможности, побольше горизонталей и вертикалей. При этом мы докажем более сильный факт: можно обойтись выбором всего 10 клеток с нужным свойством!

**Решение 1.** Будем последовательно выбирать клетки, соблюдая такие правила:

1) очередная клетка выбирается на пересечении вертикали и горизонтали, в которых еще нет выбранных клеток («ставим ладьи, не бьющие друг друга»);

2) в очередной клетке должно быть число, отличное от чисел в уже выбранных клетках.

Пусть к некоторому моменту мы уже выбрали  $k$  клеток, для определенности считаем, что это клетки с номерами 1, 2, ...,  $k$ . Поскольку при перестановке местами горизонталей и вертикалей свойство «находиться в одном ряду» у клеток сохраняется, можно считать, что выбранные клетки идут из левого верхнего угла вдоль диагонали.

Следующую клетку мы тогда можем выбирать только из правого нижнего квадрата  $(8 - k) \cdot (8 - k)$  — это  $(8 - k)^2$  претендентов. Кроме того, *запретными* для нас являются  $k$  невыбранных клеток с номерами 1, 2, ...,  $k$ . Пока  $k \leq 5$ , количество запретных клеток меньше количества претендентов на новый выбор (ведь претендентов хотя бы  $(8 - 5)^2 = 9 > 5$ ), и можно сделать следующий шаг.

Значит, действуя по нашему правилу, мы всегда сможем выбрать 6 клеток. Далее разберем 2 случая.

Первый случай: все четыре клетки правого нижнего квадрата  $2 \times 2$  запретные (рис. 1). Тогда среди остальных невыбранных клеток доски есть еще только две запретные. Рассмотрим один из четырех оставшихся рядов, в которых пока нет выбранных клеток. В нем не более 4 запретных клеток, выберем одну не запретную. Далее по порядку выберем в каждом из оставшихся трех рядов по незапретной клетке — это удастся, так как на каждом шаге число запретных клеток в ряду будет

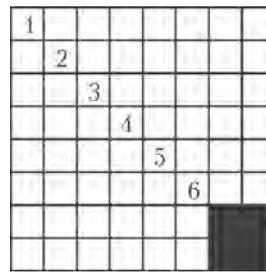


Рис. 1

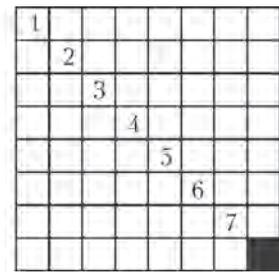


Рис. 2

увеличиваться не более чем на 1, дойдя до 7 на последнем, четвертом шаге.

Второй случай: среди четырех клеток правого нижнего квадрата  $2 \times 2$  есть незапретная. Будем считать, что в ней написано число 7. Переставив горизонтали и вертикали, получим рисунок 2. Если оставшаяся угловая клетка — незапретная, то выбираем ее, и нам хватает 8 выбранных клеток. Если же это запретная клетка, то в оставшихся нижней горизонтали и правой вертикали в сумме есть не менее 8 незапретных клеток. Значит, можно по очереди выбрать две новые клетки с еще не использованными номерами, расположенные в оставшихся горизонтали и вертикали.

Следующее решение использует классический факт из теории графов, так называемую «**лемму о хороводах**»:

*Если люди возьмутся за руки, то они образуют один или несколько хороводов, или Если в графе степень каждой вершины равна 2, то граф разбивается на непересекающиеся циклы.*

**Решение 2.** Разобьем доску  $8 \times 8$  на четыре квадрата  $4 \times 4$ , которые в свою очередь разобьем на доминошки так, чтобы в каждом горизонтальном и вертикальном ряду лежали целиком по две доминошки (рис. 3).

Построим граф, в котором вершины — 32 числа, а ребра — 32 доминошки, причем ребром соединены те числа-вершины, которые накрыты одной доминошкой. Тогда все вершины будут степени 2, так как каждое число встречается дважды. По «лемме о хороводах» граф разбивается на циклы, при этом в нашем графе могут быть и петли —

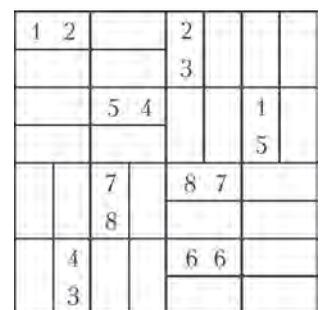


Рис. 3

ребра, соединяющие вершину с ней же самой, если в доминошке обе клетки занумерованы одним и тем же числом. Например, на рисунке 3 у числа-вершины 6 будет петля, числа 1, 2, 3, 4, 5 образуют цикл, а числа 7 и 8 соединены двумя ребрами (кратными) и дают цикл длины 2 (соответствующая часть графа показана на рисунке 4). Устроим в каждом цикле обход, начало каждого ребра при обходе будем отмечать как выбранную клетку на доске. Скажем, для цикла 1-2-3-4-5-1 на рисунке 3 мы выберем клетку с номером 1 из доминошки 1-2, клетку с номером 2 из доминошки 2-3, клетку с номером 3 из

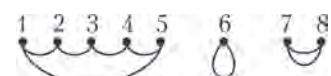


Рис. 4

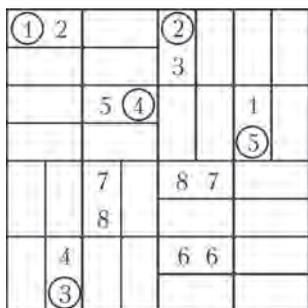


Рис. 5

доминошки 3-4, клетку с номером 4 из доминошки 4-5 и клетку с номером 5 из доминошки 5-1 (рис. 5). В результате каждое число будет выбрано только один раз, всего будут выбраны нужные 32 клетки, при этом в каждом горизонтальном и вертикальном ряду окажется минимум по две выбранные клетки, так как каждый ряд содержит при

нашем разбиении целиком две доминошки.

Вновь нами доказан более сильный факт, чем требовалось!

В решении 3 мы воспользуемся замечательной **теоремой Холла** (см., например, статью А.Романова «Задачи и теоремы о представителях» в Кванте №1 за 2015 год):

*Пусть в каком-нибудь множестве  $X$  выделены подмножества  $X_1, X_2, \dots, X_n$ . Для того чтобы в  $X$  можно было выбрать  $n$  различных элементов  $a_1, a_2, \dots, a_n$  таких, что  $a_1 \in X_1, \dots, a_n \in X_n$ , необходимо и достаточно выполнение следующего условия: объединение любых  $k$  заданных подмножеств должно содержать по крайней мере  $k$  элементов для всех целых  $k$  от 1 до  $n$ .*

Теорему Холла также называют **теоремой о различных представителях** или **теоремой о деревенских свадьбах**, а иногда и **леммой о девушках**. Последние названия ведут свое происхождение от формулировки немецкого математика Германа Вейля:

*«В деревне относительно каждого юноши и каждой девушки известно, дружат они или нет. Если для каждой  $k$  юношей ( $k$  – любое натуральное число в пределах от 1 до  $n$ , где  $n$  – количество юношей) объединение множеств их подруг содержит по крайней мере  $k$  девушек, то каждый юноша может выбрать себе жену из числа своих подруг».<sup>1</sup>*

Фактически же эта замечательная теорема рассматривает некоторые интересные свойства **двудольных** графов, т.е. графов, в которых вершины разбиваются на два множества (на две доли) и ребра соединяют только вершины из разных множеств.

**Решение 3.** Рассмотрим двудольный граф, в котором в первой доле вершины – вертикальные и горизонтальные ряды (16 «юношей»), а во второй доле – числа (32 «девушки»). Ребром соединяем ряд-юношу и число-девушку, если в соответствующем ряду есть это число. При этом в графе могут быть и кратные ребра, если одно и то же число дважды попадает в один ряд. Степень каждого «юноши» равна 8, так как в ряду 8 клеток, а степень каждой «девушки» равна 4, так как каждое число встречается по два раза в вертикалях и в горизонталях. Проверим, что для данного графа выполняются условия теоремы «о деревенских свадьбах». Действительно, у любых  $k$  «юношей» в сумме  $8k$  «подруг» с учетом повторов, но каждая «подруга» повторяется в этом наборе не более 4 раз (2 строки и 2 столбца, возможно, одни и те

же), следовательно, среди них не менее  $2k$  различных «девушек», т.е. даже больше  $k$ . Таким образом, по теореме Холла имеем, что наших юношей можно поженить на подругах. Женим – получилось 16 свадеб. Каждая свадьба дает нам выбранную клетку в соответствующем ряду. Всего мы выбрали 16 клеток с разными числами, а в каждом вертикальном и горизонтальном ряду есть хотя бы по одной выбранной клетке, что нам и требовалось.

При этом мы обошлись 16 клетками, что также усиливает исходное требование задачи (хоть и не так сильно, как 10 клеток из решения 1).

Но оказывается, можно обойтись всего 8 выбранными клетками, и этот самый сильный факт доказывается не так уж сложно. Основная идея – рассмотреть ВСЕ попытки найти на доске 8 различных чисел-«ладей», не бьющих друг друга.

**Решение 4.** Как известно, на шахматную доску  $8 \times 8$  можно поставить 8 ладей, не бьющих друг друга, 8! способами, так как в первую вертикаль ладью можно поставить восемью способами, во вторую – уже семью и т.д., в последнюю – одним способом. А теперь посмотрим, сколько из этих способов нам могут не подойти. Способ не подходит, если какие-то две ладьи оказались на клетках с одним и тем же номером. При этом если одинаковые числа оказались в одном ряду, то они нам не «портят» ни одного способа. А вот если два одинаковых числа оказались в разных горизонталях и вертикалях (т.е. могут быть заняты ладьями), то они «портят» нам 6! способов, потому что оставшиеся 6 ладей размещаются на «доске  $6 \times 6$ », получающейся выбрасыванием соответствующих пары горизонталей и пары вертикалей. Таким образом, каждое из 32 чисел может нам «испортить» 0 или 6! способов расстановки 8 ладей, при этом какие-то способы могут быть одновременно «испорчены» разными числами. Но в любом случае в сумме мы теряем не более  $32 \cdot 6!$  способов. Значит, существует не менее  $8! - 32 \cdot 6! = 24 \cdot 6! = 17280$  способов расстановки на доске 8 ладей, не бьющих друг друга, при которых ладьи встают на 8 различных чисел. Каждый из этих вариантов нас, естественно, устроит. В результате мы обошлись всего 8 выбранными клетками под этими ладьями.

Воистину, удивительный факт! Как и сама задача, которая, несомненно, заслуживает времени на обсуждение ее решений.

В качестве упражнений приведем еще три решения исходной задачи. Разберитесь, насколько идеи каждого из них позволяют уменьшить число выбираемых клеток на доске.

#### Упражнения

**1 (решение 5).** Выберем 32 клетки так, чтобы как можно больше строк и столбцов содержали хотя бы по одной выбранной клетке. Допустим, что в некотором ряду, скажем в левом столбце, нет ни одной выбранной клетки. В нем не может быть совпадающих чисел (иначе одно из них было бы выбрано), так что все числа в этом столбце разные. Рассмотрим восемь выбранных клеток с теми же числами на оставшейся части доски. Пусть  $K$  – одна из этих клеток. В одном из рядов, содержащих  $K$ , других выбранных клеток нет (иначе вместо  $K$  мы могли бы выбрать клетку с тем же числом в левом столбце). Отметим этот ряд.

<sup>1</sup> См., например, книгу Н.Я.Виленкина «Популярная комбинаторика».

Прделаем это для всех клеток, соответствующих числам левого столбца, и вычеркнем отмеченные ряды (все они будут разными, так как в каждом ровно одна клетка выбрана). Так как мы вычеркнем не все, останется «доска» из 8 рядов – скажем,  $k$  столбцов и  $8 - k$  строк. Ее площадь тогда равна  $k \cdot (8 - k)$ , что не больше 16. Значит, всего выбранных клеток было не более  $16 + 8 = 24$ . Противоречие.

**2 (решение 6, вариация решения 5).** Отметим для начала произвольные 32 клетки, занумерованные разными числами. Невыбранные клетки будем называть «свободными», а линии (строки или столбцы), где все клетки свободны, – пустыми.

Допустим, что какая-то линия, например первая строка, пуста. Следовательно, в ней стоят 8 разных чисел, и в других строках отмечено 8 клеток с соответствующими числами. Мы утверждаем, что одно из этих 8 чисел является не единственным ни в своей строке, ни в своем столбце, и, следовательно, его можно заменить равным ему числом из первой строки, не «обнуляя» других строк или столбцов, т.е. уменьшить число пустых строк.

В самом деле, на всей доске, кроме первой строки, свободны только 24 клетки. Поэтому есть не более трех строк, в которых одно из 8 чисел стоит «в одиночестве», и не более четырех таких столбцов. Следовательно, одиноки в своей строке или столбце не более семи чисел, и хотя бы одно из наших 8 чисел действительно можно заменить. Если после этого все еще есть пустые строки или столбцы, действуем аналогично.

**3 (решение 7).** Всего есть  $2^{32}$  выборов 32 клеток с разными числами на них (из каждой пары клеток, занумерованных одинаково, надо выбрать одну). Оценим число плохих выборов. Пусть в первом столбце нет выбранных чисел. Это значит, что в нем все числа различны, поэтому таких выборов  $2^{24}$ . Всего рядов 16, поэтому общее число плохих выборов не больше  $16 \cdot 2^{24} = 2^{28} < 2^{32}$ , т.е. хороших выборов много.

P.S. Попробуем слегка изменить условие исходной задачи. Пусть теперь у нас в 64 клетках записаны 16 чисел, каждое по 4 раза. Возникает вопрос: «Можно ли теперь гарантировано отметить по одной клетке с каждым числом так, чтобы в каждой горизонтали и в каж-

дой вертикали было отмечено хотя бы по одной клетке?» И если можно, то какие из наших решений проходят в новой задаче?

Оказывается, что и этот факт будет верным. Например, возникает очевидное решение, аналогичное решению 3. Каждая девушка-число будет со степенью 8, так как встречается 4 раза и учитывается каждый раз в 2 рядах, при этом возможно, что какую-то дружбу мы учли до 4-х раз, если число попало четырежды в один ряд. Из теоремы Холла следует, что у нас есть нужные 16 свадеб. Как все оказывается просто и красиво!

А если задуматься над решением 2, то... здесь у нас объявится великий Эйлер! В нашем графе теперь каждая вершина имеет степень 4, возможно с кратными ребрами и петлями. Тогда каждая компонента связности будет состоять только из вершин четной степени, значит, выполняется критерий эйлеровости – в каждой компоненте связности будет эйлеров цикл, т.е. цикл, проходящий по всем ребрам один раз, при этом каждая вершина в цикле присутствует дважды и каждый эйлеров цикл будет четной длины. Значит, в каждом из этих эйлеровых циклов можно устроить раскраску ребер в шахматном порядке (белое, черное, белое, черное и т.д.). В результате, например, в графе черных ребер каждая вершина окажется со степенью 2 и здесь сработает уже лемма о хоровах, согласно которой граф черных ребер разбивается на один или несколько непересекающихся циклов, в которых мы по аналогии с решением 2 устроим нужный нам обход. Таким образом, нами доказан уже более сильный факт о том, что в каждом ряду встретится хотя бы по 2 отмеченные клетки.

Как полезно менять условие задачи! Сразу «полезут» другие красивые идеи!

## ЛАБОРАТОРИЯ «КВАНТА»

# Спасем водолаза

**А. ПАНОВ**

**П**РОШЛО НЕСКОЛЬКО ЛЕТ С ПУБЛИКАЦИИ СТАТЬИ «Картезианский водолаз – генерация Р» (см. «Квант» № 2 за 2012 г.). За это время я узнал несколько новых вещей, о которых хочу рассказать здесь. И еще хочу исправить одну ошибку. Оказывается, изобретателем картезианского водолаза был вовсе не Декарт, а, скорее всего, итальянский монах Рафаэлло Маджотти (Raffaello Magiotti, 1597–1656) – последователь Галилея и друг Торричелли.

В 1648 году Маджотти опубликовал трактат о несжимаемости воды, он как раз использовал водолаза для иллюстрации этой несжимаемости. Посмотрите на рисунок 1 (а также на 4-ю страницу обложки), где воспроизведены авторские рисунки Маджотти, – уж двух водолазов вы там точно узнаете.

«Le caraffine di Magiotti» – так называется текст, написанный Бениамино Данесе и расположенный на сайте <http://www.reinventore.it/>. С итальянского это название переводится очень просто – «Флакочки (или графинчики) Маджотти». Кроме того, на сайте имеется 12-ти минутный ролик (кадр из него приведен на рисунке 2). Я его посмотрел несколько раз с большим удовольствием и всем советую это сделать.

Хотя в прошлый раз я рекомендовал использовать в качестве водолаза обычную пипетку, но после просмотра фильма решил вернуться к классическим стеклянным аптекарским флакончикам.

Итак, напомним водой пластиковую бутылку, а дальше...

...Флакочик, частично заполненный водой, вверх дном опустим в бутылку. При этом количество воды во флакончике должно быть отрегулировано таким образом, чтобы он обладал небольшой положительной плавучестью – при слабом толчке он должен уходить под воду. Теперь поплотнее завинтим пробку, и водолаз готов к действию. При нажатии на пластиковую бутылку объем воздуха внутри флакончика уменьшается, и флакончик опускает-

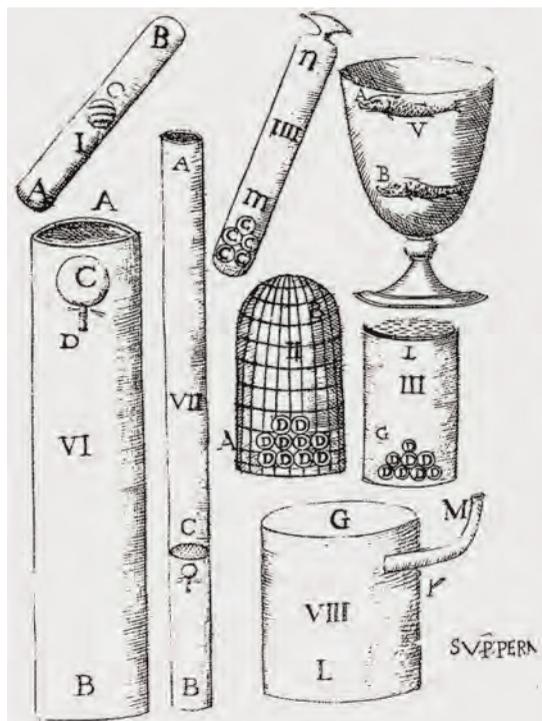


Рис. 1. Флакончики Маджотти

ся вниз. Отпускаем бутылку – водолаз плывет вверх...

Это фактически небольшая цитата из предыдущей статьи. А теперь займемся новыми экспериментами.

**Будем спасать водолаза.** Бывает обидно, когда водолаз, опущенный в бутылку, сразу идет на дно. Приходится выливать воду из бутылки, доставать водолаза и снова налаживать его. Давайте попробуем обойтись без этого – спасем водолаза и заставим его подняться наверх самостоятельно. Это можно сделать несколькими способами.

*Способ 1: согреем.* Допустим, водолаз оказался на дне и не хочет подниматься. Отвинтим пробку и поставим бутылку с водолазом в горячую воду. Вода в бутылке согреется, объем воздуха во флакончике увеличится, и водолаз всплывет. Правда, когда вода остынет, водолаз снова утонет.

*Способ 2: вдохнем.* Попробуем сделать что-то вроде искусственного дыхания. Плотно обхватим губами горлышко бутылки и вдохнем в себя часть содержащегося там воздуха. Давление в бутылке уменьшится, объем воздуха во флакончике опять-таки увеличится, и водолаз всплывет. Но и здесь, как только мы отнимем рот от бутылки, водолаз потонет.

*Способ 3: поднимем.* Когда мне в первый раз подарили барометр, я тут же забрался с ним в лифт и поехал на верхний этаж. Стрелка барометра, конечно же, показала, что с высотой давление воздуха уменьшается. Воспользуемся этим фактом и захватим с собой в лифт утонувшего водолаза, находящегося в открытой бутылке. Если подняться достаточно высоко, то давление воздуха существенно уменьшится, воздух внутри флакончика расширится настолько, что водолаз приобретет положительную плавучесть и сам поднимется вверх.

*Способ 4: сожмем.* Пусть водолаз оказался на дне и не хочет подниматься. Отвинтим пробку, сожмем одной



Рис. 2. Кадр из фильма Бениамино Данесе

рукой бутылку, чтобы из нее вышло побольше воздуха. Не уменьшая сжатия, другой рукой завинтим пробку. После того как мы отпустим бутылку, начнут работать упругие силы, стремящиеся вернуть ей прежнюю форму. Они противодействуют внешнему давлению воздуха и увеличивают объем бутылки, в том числе и объем воздуха во флакончике. Водолаз приобретает положительную плавучесть, всплывает и становится готовым к работе.

**Одно? Два? Три!** Почему все-таки иногда получается так, что в стакане флакончик плавает, а бросить его в бутылку – он тонет? Потому, что его не нужно бросать, а надо аккуратно и потихоньку опустить в бутылку, тогда он будет плавать сверху, как это делал в стакане. Но сам факт утопления достаточно интересен.

Не всякий плавающий сверху водолаз утонет, если его толкнуть вниз. Такое возможно, только если он обладает *малой* положительной плавучестью. Дело в том, что когда водолаз опускается вниз, то гидростатическое давление жидкости на него возрастает, объем воздуха внутри флакончика уменьшается, плавучесть водолаза тоже уменьшается. И если бутылка достаточно высокая, то на некоторой высоте плавучесть станет отрицательной, и водолаз сам собой потонет.

Выходит, что у хорошо отрегулированного водолаза с малой положительной плавучестью есть два *устойчивых* положения равновесия внутри бутылки. Одно, когда водолаз находится в верхнем положении, и другое, когда он покоится на дне. Если он пребывает в одном из этих состояний, то после малого возмущения он туда же и вернется. При этом в верхнем положении его плавучесть положительная, в нижнем – отрицательная.

Но тогда получается, что на некоторой промежуточной высоте плавучесть водолаза должна быть равна нулю. И это еще одно положение равновесия водолаза. Только в отличие от первых двух оно *неустойчивое*. Если водолаз из этого положения чуть сместится вверх, то у него появится положительная плавучесть, и он продолжит свое ускоряющееся восхождение. Если же отклонится чуть вниз, то у него появится отрицательная плавучесть, и он потонет.

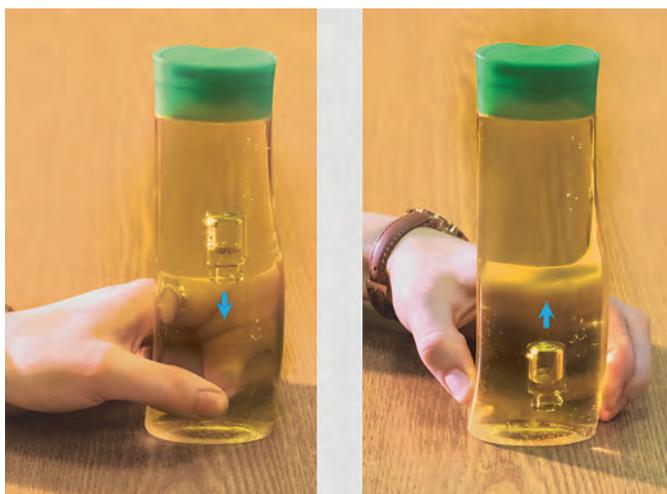


Рис. 3. Жмем так (как показано слева), и водолаз тонет, жмем по-другому (как справа) – всплывает

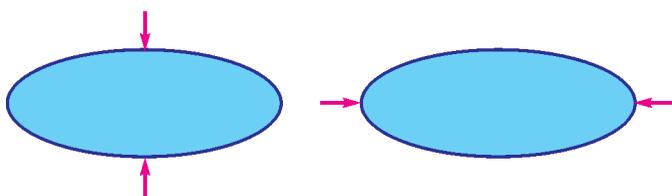


Рис. 4. Сжимаем так (как слева), и площадь сечения уменьшается, сжимаем по-другому (как справа) – увеличивается

**Водолаз двойного действия.** Хорошо бы иметь водолаза, который по нашему желанию опускался бы на дно и оставался там или – при желании – поднимался бы наверх и там плавал. Вот несколько путей добиться этого.

1: *завинтим/отвинтим.* Поместим в бутылку водолаза с малой положительной плавучестью. Начнем завинчивать пробку. Ее соединение с бутылкой станет герметичным еще до того, как пробка полностью завинтится. С этого момента и до полного закручивания пробки объем, заключенный внутри бутылки, начнет уменьшаться. Будет уменьшаться и объем воздуха внутри водолаза, и водолаз потонет. Отвинтим пробку – водолаз поднимется. Это и есть первый пример водолаза двойного действия.

2: *сожмем и сожмем.* Встречаются бутылки овального сечения (рис.3). Если рассечь такую бутылку горизонтальной плоскостью, то в сечении получится что-то вроде изображенного на рисунке 4. Запустим в такую бутылку водолаза с малой положительной плавучестью и двумя состояниями устойчивого равновесия. Если нажать на плоские стороны бутылки (см. рис. 3 и 4, слева), то площадь ее сечения уменьшится, значит, уменьшится объем, и водолаз опустится на дно. Если же теперь нажать на закругленные стороны (см. рис. 3 и 4, справа), то объем увеличится, и водолаз всплывет.

3: *наденем хомут.* Возьмем червячный хомут большого диаметра, который можно закрепить на пластиковой бутылке (рис.5). Поместим водолаза положительной плавучести в бутылку, завинтим пробку и с помощью отвертки начнем стягивать хомут. Давление воздуха внутри бутылки будет возрастать, и в некоторый момент водолаз опустится на дно. И этот процесс обратимый. Если ослабить хомут, водолаз поднимется наверх.



Рис. 5. Бутылка с хомутом, очень удобная для управления водолазом

4: *стукнем.* Кто уже пытался создать водолаза с минимальной положительной плавучестью, имеющего два устойчивых состояния равновесия – вверху и внизу бутылки, тот знает, что это трудная задача. Тут нужна предварительная тонкая настройка соотношения воды и воздуха внутри водолаза. Применение червячного хомута упрощает эту проблему. Поместим водолаза положительной плавучести в бутылку и закрутим пробку. Теперь потихоньку начнем стягивать хомут до тех пор, пока нижнее положение водолаза «впервые» не станет устойчивым. У такого водолаза будут два устойчивых состояния – вверху и внизу, а между ними (на небольшой высоте) будет еще неустойчивое состояние равновесия. Сжатием бутылки опустим водолаза на дно. Если теперь ударить дном бутылки о стол, то водолаз подскочит, как на батуте, поднимется выше неустойчивого положения равновесия, после чего приобретет положительную плавучесть и сам поднимется наверх. Вот вам и еще один водолаз двойного действия.

Вместо того чтобы стучать бутылкой о стол, можно ударить кулаком по столу – эффект будет таким же.

5: *приподнимем.* Конечно, стучать кулаком по столу это слишком грубое воздействие. Будем действовать деликатнее. Как в предыдущем случае, создадим водолаза с тремя положениями равновесия. Сжатием бутылки отправим водолаза на дно. Теперь возьмемся за пробку и приподнимем бутылку – водолаз всплывает. Оказывается, что сила тяжести, нескомпенсированная реакцией стола, увеличивает объем высокой круглой бутылки, и давление воздуха в ней падает.

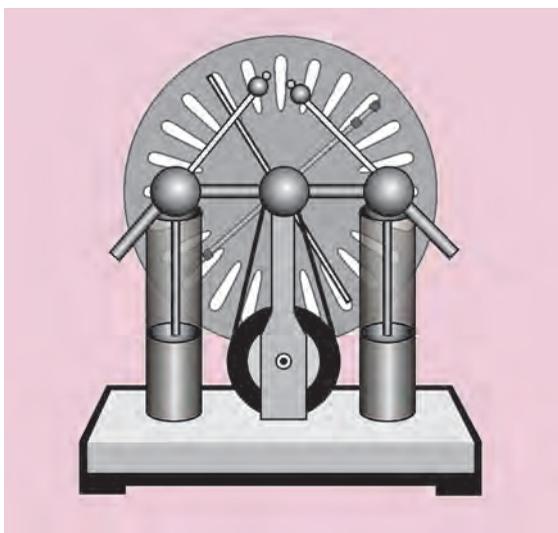
6: *наклоним.* Опять создадим водолаза с тремя положениями равновесия и опустим его на дно. Он будет находиться там в состоянии устойчивого равновесия. Сильно наклоним бутылку, чтобы высота столба воды над водолазом существенно уменьшилась. На уровне водолаза давление воды уменьшится, воздух в нем расширится, и он начнет подниматься. В некоторый момент поставим бутылку вертикально – и водолаз окажется наверху.

Вот, пожалуй, и все. Добавлю еще, что снабдить водолаза червячным хомутом меня научил мой студент Дима Гульев. Мне кажется, это очень удачная идея.

# Электростатика для умных школьников

А.ЗИЛЬБЕРМАН

ТЕМА НАШЕЙ БЕСЕДЫ – «ЭЛЕКТРОСТАТИКА ДЛЯ УМНЫХ ДЕТЕЙ». Что я имею в виду? Если говорить о цели изучения физики в школе, это вопрос сложный, разным детишкам нужна совершенно разная физика. Если работать с разумными детьми, а в последние годы мне везет на разумных детей, то самое главное, как мне кажется, это некое интеллектуальное развитие. Физика дает такие возможности. Девятый класс, когда школьники предыдущим своим изучением физики подготовлены к тому, чтобы всерьез начать разговаривать про механику, очень сильно прибавляет таких возможностей. А в десятом классе – термодинамика, а потом электростатика – уже серьезная, нудная, логично устроенная наука. И вот тут очень здорово дать умным школьникам возможность попробовать себя уже в такой почти теоретической физике. В электростатике есть множество задач достаточно трудных и интересных. В школе этому разделу не очень



Вниманию читателей предлагается текст лекции, которую прочитал Александр Рафаилович Зильберман (1946–2010) на конференции лауреатов Всероссийского конкурса учителей математики и физики Фонда «Династия» в 2009 году.

На протяжении почти сорока лет Александр Рафаилович был одним из самых активных авторов и членов редколлегии нашего журнала.

Видеозапись лекции можно найти в интернете по адресу: <http://elementy.ru/video/teachers>

Публикацию в нашем журнале подготовил А.Кондратьев.

везет, его постоянно делают все меньше и меньше, и доходит до того, что уже даже для ЕГЭ не вполне достаточно того, что в школе рассказывают, – это уж совсем беда.

## Потенциал и разность потенциалов

Начинается все с медленных исторических разговоров о том, как Кулон умудрился получить свой закон. Самое удивительное, конечно, как он сумел это сделать при той точности экспериментов, которую он мог обеспечить. Разницу между единицей, деленной на  $r^2$ , и единицей, деленной на  $r^3$ , например, выяснить совершенно невозможно. Мы с ребятами обсуждаем это довольно подробно. Много интересных разговоров посвящено тому, что такое заряд и как возникают электрические поля, а потом идет уже серьезный материал. Начинается с того, что я им долго и нудно рассказываю про то, что такое разность потенциалов и что такое потенциал. Вот у меня есть две точки – точка  $A$  и точка  $B$  (рис.1), есть электрическое поле неподвижных зарядов, т.е. электростатическое поле. Разность потенциалов определяется отношением работы сил электростатического поля при перемещении пробного заряда из точки  $A$  в точку  $B$  к величине этого пробного заряда:

$$\Delta\varphi_{AB} = \frac{A_{\text{сэщпизитавтб}}}{q_{\text{пр}}}$$

Как видите, в этой формуле реализуется самое главное – здесь сразу понятно, что написано. Как ни странно, это штука запоминается, и детишки с удовольствием такое определение повторяют. Вот мы с ними и учимся эти разности потенциалов в простых полях считать. А потом возникает серьезный вопрос – чаще всего я дожидаюсь, пока кто-то из ребят задаст этот вопрос: зачем нужна разность потенциалов? Чтобы считать работы в электрическом поле. Как считать эти работы? Нужно найти разность потенциалов. Значит, для того чтобы найти работу, ее вначале нужно знать. Немножко нелогично получается. Зачем же эта величина нужна, если пользы от нее вроде никакой нет? И вот тут выясняется самое главное; на удивление странно, что об этом (я не видел, по крайней мере) в школьных учебниках прямого разговора не ведется.

Оказывается, разность потенциалов полезна тогда, когда ее *не надо* считать. Чаще всего разность потенциалов изначально задана. Ну, например, у меня имеется два проводника – проводник  $A$  и проводник  $B$  (рис.2). Как сделать так, чтобы проводник  $A$  был положительнее на шесть вольт? Можно, конечно, решить задачу теоретической физики – посчитать, какие для этого нужны заряды. Но для этого нужно очень многое знать про форму этих проводников, про расстояние между ними, т.е. задача получается непробиваемая. И не только на школьном уровне, но и на вузовском тоже. Но есть

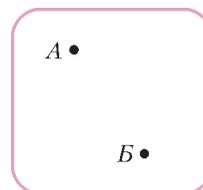


Рис. 1

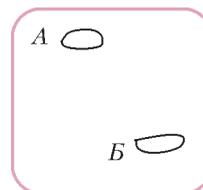


Рис. 2

способ простой. Подключим батарейку на шесть вольт плюсом к *A*, а минусом к *B*. Батарейка сама разберется, какие заряды нужно с одного проводника перетащить на второй, чтобы разность потенциалов получилась ровно шесть вольт. И именно такие случаи выгодны для применения понятия «разность потенциалов». Так, в электронно-лучевой трубке электроны разгоняются ускоряющим напряжением 12 тысяч вольт. Но эта величина задана. Мы берем батарейку в 12 тысяч вольт (или электронную схему), и она обеспечивает эти вольты.

Разность потенциалов либо совсем не приходится рассчитывать, либо, например, есть пара простых случаев, где даже школьник может все посчитать. Первый случай – однородное поле, там разность потенциалов находится легко. Второй случай – кулоновское поле точечного заряда. Тут возникает серьезная проблема, хотя она немножко кажущаяся. Мы все знаем, что школьная математика от физики отстает на полгода-годик: когда школьникам нужно объяснять, что такое производная или интеграл, где эти математики? Нету, т.е. всю математику приходится рассказывать на физике. Как, например, в случае поля точечного заряда. И я рассказываю, что такое интеграл, не потому, что ужасно хочется объяснить это детям, а просто это удобный случай поговорить о чем-нибудь умном.

Итак, у меня есть электростатическое поле, напряженность которого, если это поле точечного заряда, равна  $kQ/x^2$  (рис.3). Как посчитать разность потенциалов между двумя точками? Пусть точка 1 находится на расстоянии  $x_1$  от заряда, точка 2 – на расстоянии  $x_2$ . Довольно быстро можно объяснить ребятам, что нужно считать площадь под этой кривой. Сам разговор – это уже не математика, это достаточно полезная для понимания вещь.

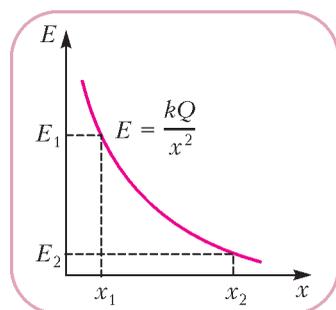


Рис. 3

А вот теперь – как считать эту площадь? В 10 классе мне попадаются иногда дети, которые интегрировать умеют. Они гордо заявляют, что надо посчитать интеграл. Хорошо, если они не знают, как его посчитать, и с ними тогда легко... Так как считать эту площадь? Тут есть принципиально важные для меня моменты. Один из них такой. Можно ли взять среднее арифметическое? Можно ли написать такую формулу:

$$\Delta\varphi = \frac{E_1 + E_2}{2} (x_2 - x_1) ?$$

Понятно, что нельзя. Уж очень хитрым образом меняется напряженность при изменении координаты. И если координата изменяется во много раз, то мы получим очень большую ошибку – ведь мы по этой формуле подсчитаем площадь трапеции. А это уже из картинке видно – не то.

Что делать в этой ситуации? Математики предлагают такой способ: давайте разобьем на множество кусочков путь от точки 1 до точки 2, на каждом кусочке возьмем среднюю величину, а потом просуммируем. Сразу возникает такой вопрос: а почему это лучше? Конечно, на

маленьком кусочке ошибка от того, что я возьму среднее арифметическое, будет маленькой. Но зато этих кусочков будет много, слагаемых много. А вдруг при сложении этих маленьких ошибок получится еще хуже? Это серьезный вопрос уже не по арифметике, а по физике. Насколько разумно разбивать расстояние на множество маленьких? Можно ли на этом выиграть?

Есть замечательный пример. Докажем модифицированную теорему Пифагора: сумма длин катетов равна длине гипотенузы. Сделаем это стандартным способом: нарисуем прямоугольный треугольник, разделим гипотенузу пополам, опустим перпендикуляры на катеты, возьмем ломаную (рис.4,а). Эта ломаная далека от гипотенузы. Разобьем и кусочки гипотенузы пополам, и построим уже

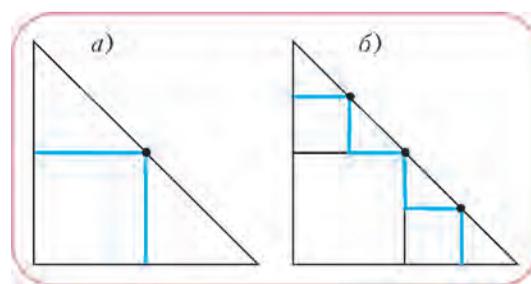


Рис. 4

другую лестницу (рис.4,б). Дальше продолжим делить отрезки гипотенузы пополам. Легко видеть, что если таких точек деления мы возьмем много, то наша ломаная как угодно близко подойдет к гипотенузе. Так давайте длину гипотенузы посчитаем как длину этой ломаной – ведь если они близки друг к другу, то вроде бы должны приближаться по длине друг к другу. Но сумма вертикальных кусочков равна одному катету, сумма горизонтальных – другому. Таким образом, мы доказали обычным для школьников способом, что длина гипотенузы равна сумме длин катетов. Многие с этим не согласятся. Понятно, что это не так.

Почему же в случае с потенциалом, например, можно так поступать, а где-то нельзя? Чем отличаются друг от друга случаи, когда это проходит или нет? Серьезный вопрос. Мы ищем такой вариант, когда при делении ошибки уменьшаются намного быстрее, чем увеличивается число отрезков. Если бы мы взяли этих вдовь отрезков вдвое больше и если бы каждая ошибка уменьшилась вдвое, мы бы не выиграли совсем ничего. А если каждая ошибка уменьшится в сто раз или хотя бы вчетверо, то уже есть смысл делить и дальше. Вот это уже разговор про физику. И он довольно интересный. Я предлагаю школьникам в этом случае решить такую забавную задачу.

Возьмем два числа, для определенности рост двух школьников. Пусть у одного из них рост один метр, а у другого побольше – скажем, три метра. И найдем средний рост. Он будет два метра, как нетрудно видеть. Возникает вопрос: кроме среднего арифметического школьники еще много чего знают, правда? Например, среднее квадратическое (которое в 10 классе они уже из термодинамики выучили), среднее геометрическое и т. д. Почему мы так любим брать среднее арифметическое? Да не почему, просто привыкли так с первого класса, самая простая вещь. А что если я посчитаю среднее квадратическое и по

нему оценю средний рост в этой популяции из двух человек? Сколько получится? Средний квадратический рост есть корень квадратный из  $(1^2 + 3^2)/2 = 5$ . Это 2,23 примерно. Обратите внимание, что разброс исходных величин очень большой, одна больше другой аж в три раза, а среднее квадратическое от простого среднего арифметического отличается всего процентов на десять. А что такое среднее геометрическое? Это корень квадратный из произведения:  $\sqrt{1 \cdot 3} = 1,73$ . Тоже не такое большое отличие от среднего арифметического. А что если я возьму числа поближе? И мы начинаем с ребятами такую процедуру. Берем, скажем, число 1 и число 10. Потом число 10 и число 11. Потом число 100 и число 101. Расчет при помощи калькулятора показывает, что когда числа близки друг к другу, все эти средние величины уже отличаются друг от друга совсем мало.

Более того, можно даже доказать (это простая и очень полезная задачка по математике), что когда эти числа становятся близки друг к другу, то все средние значения быстро сливаются. И понятно, что есть смысл делить наш

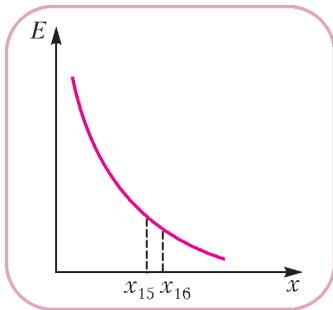


Рис. 5

путь на маленькие кусочки! Зачем? Вот зачем. Тогда можно брать в качестве среднего значения любую удобную величину. Для нашего расчета, например, удобно взять среднее геометрическое. Пусть у нас есть кусочек между точками  $x_{15}$  и  $x_{16}$  (рис. 5). Возьмем среднюю напряженность поля в виде  $\sqrt{E_{15} \cdot E_{16}}$ , т.е. среднее геометрическое. Разумеется, у меня есть определенная цель. Со средними арифметическими ничего интересного не получится. А вот со средними геометрическими формула сейчас свернется и станет совсем простой.

Мне очень важно, особенно когда я работаю с классом, который заинтересован, чтобы ребята все время понимали, что мы делаем. Есть такой математический метод, когда человек исписывает всю доску и в конце концов получает красивый ответ. При этом он производит рассуждения типа «а теперь перенесем это в левую часть», «теперь все разделим на 17» и иногда еще и спрашивает: понятно? Ну что же здесь непонятного, разделил на 17. Зачем это делается, до самого последнего момента непонятно. Мне кажется, что физику так преподавать нельзя. У меня это в свое время, когда я был маленьким, вызывало дикое раздражение. Когда я никак не мог понять, зачем же преподаватель это все делает. Иногда удавалось – тогда это доставляло удовольствие, конечно. Я эти кроссворды с ребятами не решаю. Мне очень хочется, чтобы они понимали, что мы делаем, и даже немножко обгоняли меня в хорошем варианте. Иными словами, я им объясняю смысл действий.

Смотрите, какая красивая вещь получится, когда я эту величину рассчитаю:

$$\sqrt{\frac{kQ}{x_{15}^2} \cdot \frac{kQ}{x_{16}^2}} = \frac{kQ}{x_{15} \cdot x_{16}}$$

– корень хорошо извлекается, и получается такое простое выражение. Итак, во-первых, у меня очень красиво

записывается эта средняя величина. А во-вторых, получается еще лучше, когда начинаешь считать разность потенциалов. Что будет, если я умножу это среднее поле на длину этого кусочка? Разность потенциалов на маленьком кусочке есть произведение этого среднего на длину кусочка, и после раскрытия скобок получается

$$\frac{kQ}{x_{15} \cdot x_{16}} (x_{16} - x_{15}) = \frac{kQ}{x_{15}} - \frac{kQ}{x_{16}}$$

Вот такая работа по перемещению единичного заряда производится на этом маленьком кусочке. Дальше я говорю вот что: эти работы мне придется складывать. И делаю паузу. Разумные детишки очень быстро догадываются, что будет, когда складываешь такие красивые слагаемые. У меня почти вся эта сумма уйдет. В следующем слагаемом будет разность  $1/x_{16} - 1/x_{17}$ , правда? И  $x_{16}$  исчезнет. Из всей этой суммы останется всего два слагаемых – самое первое и самое последнее. Кстати, это и будет ответ задачи, как посчитать разность потенциалов в кулоновском поле.

Почему этот способ допустим? Потому, что я могу взять очень подробное деление отрезка, улучшая точность моей оценки. Чем ближе соседние точки друг к другу, тем точнее я выражаю средним геометрическим настоящую среднюю величину. Кроме того, этим способом ответ получается быстро и красиво. Значит, стоит так делать.

Таких забавных примеров очень много, школьники действительно математики во многом не знают. Когда мы проходим термодинамику, мы с ними выучиваемся, лихо довольно выучиваемся, решать дифференциальные уравнения – для расчета всяких теплоемкостей это очень полезно. Более того, там нет ничего такого сложного, чему нельзя было бы научить сколько-нибудь разумного десятиклассника. Это очень полезно и потом. В конце концов, если он думает, что он уже научился решать дифференциальные уравнения (жизнь его научит, что не всякое уравнение решается), то уметь пользоваться этим красивым способом – решая задачу, составить хитрое уравнение, глядя на которое можно видеть ответ и получить его чистым красивым способом – это удовольствие настоящее. Так вот, в электростатике таких вещей много.

Вот еще пример задачи, где считать толком ничего не надо (пример для образованных ребят, задача трудная). Возьмем две большие параллельные пластины, такой уединенный конденсатор. Пусть он находится в космосе, вдали от всех других тел: вот одна пластина площади  $S$ , вот другая такой же площади на расстоянии  $d$  от первой. И зарядим его как обычно: одинаковыми по модулю и противоположными по знаку зарядами. Кстати, я со своими учениками очень подробно разбираю такой вопрос: а почему обычно у конденсатора бывает  $Q$  и  $-Q$ ? А почему бы не сделать, скажем,  $Q$  и  $-5Q$ ? Или, например,  $Q$  и ноль? В общем, это совершенно нетривиальный вопрос. Я к нему приступаю после такой задачи.

Зарядим конденсатор такими зарядами, чтобы разность потенциалов между пластинами была равна  $U_0$ . Чему равны потенциалы пластин? Каковы потенциалы каждой пластины? Я эту задачу пробовал на студентах. Они мне сразу начинают объяснять, что решение невозможно, что разность потенциалов найти можно, а вот сами потенциалы найти нельзя. А школьники находят. Это совсем простая задача. Давайте найдем какую-нибудь точку с

нулевым потенциалом. Бесконечность, конечно, годится, но это далеко. А поближе есть какие-нибудь точки, у которых нулевой потенциал? Очевидно, есть. На самом деле, это точки, находящиеся на одинаковом расстоянии от пластин, т.е. у этого конденсатора нулевой потенциал получается как раз на плоскости в середине. И я тут же нахожу потенциалы пластин:  $\pm U_0/2$ .

Между прочим, эта задачка не вполне формальная. Давайте сделаем конденсатор с маленькой дыркой и издали запустим в ее направлении заряд с какой-то скоростью  $v_0$  (рис.6). При-

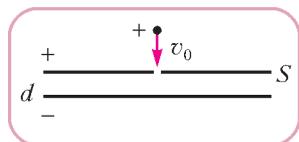


Рис. 6

чем если верхняя пластина – «плюс», а нижняя – «минус», то пусть это будет положительный заряд. И поставим задачу так: при какой начальной скорости этого заряда в

бесконечности он проскочит эту дырку в конденсаторе? Будем считать, что с этой прямой он никуда не отклоняется.

Я эту задачу довольно давно видел на приемных экзаменах в МИФИ. Как они вздумали такую задачу дать? Не решая предыдущей задачи, додуматься до ответа очень не просто. Да и снаружи от конденсатора поле ведь не равно нулю, правда? Как разобраться с этой сложной ситуацией: поле не равно нулю, но мы его посчитать не можем? Вот здесь нам может помочь слово «потенциал». Найдем точку, до которой заряд будет тормозиться. Положительная пластина находится ближе к нашему заряду, чем отрицательная, значит, снаружи от конденсатора он будет тормозиться. Если он долетел до дырки, дальше уже все в порядке – дальше поле будет его только подгонять. Значит, чтобы найти скорость, мне нужно знать потенциал верхней пластины. А эту задачу мы только что решили: потенциал равен  $U_0/2$ . И дальше эта задача «пробивается».

Таких примеров очень много, когда столь отвлеченные, на первый взгляд, рассуждения дают человеку возможность решить какую-нибудь хитрую задачу. Я сейчас, если вы позволите, предложу вам несколько задач... гадких. Таких, что школьники их не очень охотно решают.

Рассмотрим, например, такую ситуацию. Имеются сфера радиусом  $R$  и концентрическая сфера радиусом  $3R$ . Сферы проводящие. Условие задачи подсказывает, что сейчас что-то появится на расстоянии  $2R$  от центра. Разумеется, там есть точечный заряд  $Q$ . Давайте из этой ситуации построим несколько задач. Первая: какие получатся в этом случае потенциалы сфер? Обсудим сначала простой вариант, когда сферы вначале заряжены не были (рис.7). Потом построим более сложную задачу – эти две

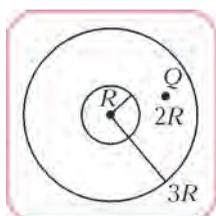


Рис. 7

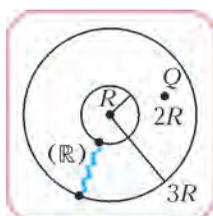


Рис. 8

сферы соединим проводником (рис.8). Какой заряд по этому проводнику протечет за большое время? И сколько при этом выделится тепла? Потом еще усложним задачу – заземлим внешнюю сферу и спросим то же самое. На самом деле, это будет очень непростая задача. Ее можно сделать еще интереснее. Ребятишки спрашивают, какое сопротивление у этого замыкающего проводника. Можно улучшить задачу, сказав, что это сопротивление тоже равно  $R$ .

Это смешно, конечно, но ответ-то не зависит от этого сопротивления, поэтому можно и  $R$  взять. В конце концов, писать эту букву чуть иначе, чтобы отличить от радиуса... Шутки шутками, но тема эта достаточно нудная и достаточно тяжелая для понимания, и любой способ сделать ее чуть смешнее или чуть забавнее помогает тому, чтобы это все запомнилось. Мне очень везет на учеников – у них есть чувство юмора, они прекрасно понимают шутки, и мне даже при этом не нужно что-то изображать. Вот сейчас мы закончим с этой задачей, у нас начнется совсем уж нудная вещь – я попробую рассказать, как школьникам доказать, а потом использовать теорему единственности в электростатике. Я помню, какие проблемы она вызывала всегда у студентов, эта теорема. Школьникам в 10 классе очень легко это рассказать, и получается, на мой взгляд, полезно.

Итак, с нашей задачей сразу возникает такой вопрос – а как ее решать? Ведь сразу же ясно, что это невозможно. Заряды каждой из сфер только в сумме оказываются нулевыми, а по сферам они распределены очень хитро, очень сложно. Я эту задачу давал студентам, они сразу начинают рисовать изображения (ну, учат их так в вузах), методом изображений что-то решать. Но изображений получается много. Задача со сферой и одним зарядом сводится к задаче про три заряда. А здесь две сферы и заряды-изображения сами дают дополнительные изображения. Посчитать что-нибудь там невозможно. В общем, если вы хотите студента развлечь на полдня, можно ему эту задачу подбросить и издали наблюдать – это интересно. Понятно, что «в лоб» посчитать это очень трудно.

Давайте все-таки эту задачу решим. Внутри маленькой сферы поля нет. Потенциал на этой сфере и внутри нее один и тот же во всех точках. Силовых линий поля нарисовать там нельзя – поля там нет. Что это означает? Что мы можем найти потенциал какой-нибудь одной точки, он будет такой же, как у всей сферы. Где находится самая лучшая точка, мы все знаем – в центре этой сферы. Чем она хороша? Она отстоит на одинаковое расстояние от всех зарядов маленькой сферы и от всех зарядов большой сферы. Потенциал этой точки складывается из потенциала, создаваемого точечным зарядом, находящимся между сфер, это  $kQ/(2R)$ , и потенциала, создаваемого сферами. Тут вроде бы начинаются трудности. Мы не знаем, как распределены заряды по внутренней сфере. Возьмем какого-нибудь достойного представителя – например, заряд  $q_{15}$  (рис.9) и запишем потенциал, который этот  $q_{15}$  создает в центре сферы. Это будет  $kq_{15}/R$ . Дальше надо просуммировать вклады в потенциал всех зарядов маленькой сферы. Вот тут

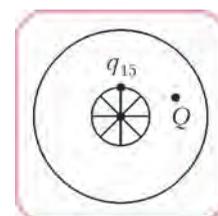


Рис. 9

сразу получается хорошо. Эта сумма  $\sum \frac{kq_i}{R}$  оказывается равна нулю: каждое из слагаемых умножается на  $k$  и делится на  $R$ . Вынесем эти множители за скобку, под знаком суммы будет стоять сумма зарядов на сфере, т.е. полный заряд внутренней сферы, а он, по условию задачи, равен нулю. Он вначале был равен нулю, и мы этой сферы не касались. Изолированный проводник не должен был изменить свой заряд. Понятно, что вклад в потенциал центра сфер от внешней сферы тоже даст ноль. Значит, потенциал центра внутренней сферы (а, значит, и любой ее точки) равен

$$\frac{kQ}{2R} + 0 + 0 = \frac{kQ}{2R}.$$

Это мы решили одну часть задачи – нашли потенциал внутренней сферы. Осталось найти потенциал наружной сферы. И вот тут школьникам приходится немножко подумать: как устроено поле снаружи от этой системы?

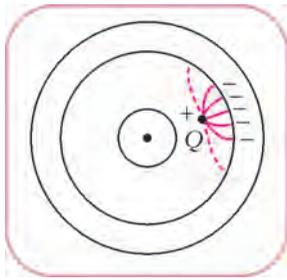


Рис. 10

Это один из способов как-то расшевелить воображение. Заряды на сферах распределены очень сложно. Нарисуем наружную сферу, для удобства понимания нарисуем ее не слишком тонкой (рис. 10), чтобы разделить в рассуждениях то, что происходит на внешней и внутренней поверхностях. Какая бы ни была тонкая проводящая сфера, у нее точно

есть и внутренняя поверхность, и внешняя. Что получится в этом случае? Внутри этой конструкции поле очень сложное. Но важно вот что: какой заряд соберется на внутренней поверхности большой сферы? Этот заряд равен суммарному заряду внутри, только с противоположным знаком. Все силовые линии должны закончиться на внутренней поверхности большой сферы (на рисунке 10 показана часть из них). Дальше они не пойдут – там начинается проводник. Следовательно, внутренняя часть этой сферы имеет заряд  $-Q$ . Значит, наружная часть имеет заряд  $+Q$  (чтобы полный заряд был нулем). Внутренний заряд расположен очень сложно. А внешний? Понятно, что он распределен равномерно. Внутренние заряды на него не действуют, силовые линии этих зарядов закончились на внутренней поверхности большой сферы.

Обратите внимание: мы разговариваем про силовые линии, когда нельзя строго что-нибудь доказать. Это нормально. Физика в школе так и представляет собой жуткую смесь из вещей понятных, очевидных и просто правильных. На самом деле мне нравится, когда мои школьники умеют доказать то, что можно доказать строго математически, а то, что нельзя доказать строго, умеют объяснять на пальцах.

Более того, снаружи от этой системы есть поле только этих наружных зарядов. Все силовые линии от внутренних зарядов кончились на внутренней поверхности большой сферы. Значит, поле снаружи от этой системы такое, как от точечного полного заряда  $Q$ , расположенного в ее центре (рис. 11). И потенциал наружной сферы легко найти: он равен  $kQ/(3R)$ . А тогда разность потенциалов

между сферами равна

$$\Delta\varphi = \frac{kQ}{2R} - \frac{kQ}{3R}.$$

Трудная ли это задача? Несколько лет назад она была предложена на Московской городской олимпиаде одиннадцатиклассникам, и они ее не очень здорово решали. Хотя, конечно, нашлись несколько человек, которые ее пробили. Иными словами, трудная задача. С другой стороны, ничего запредельного здесь нет – надо лишь догадаться до нескольких вещей. Процесс, когда люди догадываются, очень важен. Самое полезное – в этом процессе. И школьнику это нужно. И не как результат. В процессе он чему-то учится, учится соединять рассуждения более или менее строгие с рассуждениями на пальцах. Физика – это единственный школьный предмет, который позволяет хоть как-то отработать навыки модельного мышления. В процессе обсуждения таких задач школьник многому может научиться, и, по-моему, это и есть цель школьного обучения разумных детей.

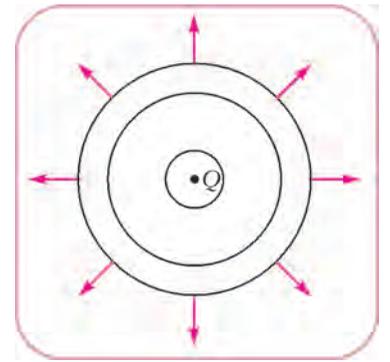


Рис. 11

Теперь усложним нашу задачу. Соединим внутреннюю и внешнюю сферы проводником, имеющим сопротивление  $r$  (давайте обойдемся без «скандалов»). Какой полный заряд протечет по этому проводнику за большое время? И какое количество теплоты в нем выделится? Обратите внимание, это очень сложная задача. Я видел очень мало школьников, которые могли бы ее пробить с нуля, без предыдущей задачи, которую мы сейчас с вами обсуждали. И дело не только в том, что школьник не умеет решать простого дифференциального уравнения, которое дает экспоненту. И не нужно его уметь решать, оно здесь совершенно не при чем. Давайте решим эту задачу более или менее строго.

Итак, пусть за некоторое время по проводнику сопротивлением  $r$  успел перетечь заряд  $q$ . Запишем выражение для разности потенциалов между сферами. Это будет напряжение, приложенное к резистору. Мы воспользуемся результатами предыдущей задачи. Потенциал наружной сферы остался прежним. Когда внутри перетекают какие-то заряды, полный заряд остается тем же самым, на наружной стороне большой сферы по-прежнему равномерно распределен заряд  $Q$ . Другими словами, снаружи от системы поле не меняется, значит, потенциал наружной сферы остается прежним:  $kQ/(3R)$ . А как выглядит потенциал внутренней сферы? Теперь две суммы в выражении для него

$$\frac{kQ}{2R} + \sum \frac{kq_i}{R} + \sum \frac{kQ_i}{3R}$$

уже ненулевые. Сферы оказались заряжены, значит, потенциал внутренней сферы равен

$$\frac{kQ}{2R} + \frac{k(-q)}{R} + \frac{kq}{3R},$$

где  $-q$  – это сумма зарядов внутренней сферы, а последнее слагаемое – вклад заряда наружной сферы. Вычитая отсюда потенциал наружной сферы, получим разность

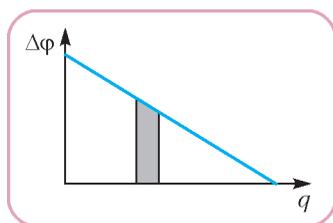


Рис. 12

потенциалов  $\Delta\varphi$ . Нарисуем график этой разности как функцию перетекшего заряда  $q$  (рис.12). Этот график – линейная убывающая функция заряда  $q$ . График этот останавливается, когда разность потенциалов становится нулевой.

Если найти, при каком  $q$  это происходит, то первая часть задачи – какой полный заряд перетечет через резистор – решена. Совершенно формально, без всякого приложения головного мозга: написал выражение для потенциалов, получил ответ.

На этом же графике есть и второй ответ. Площадь под этим графиком – это и есть выделившееся количество теплоты. Что нарисовано на графике? Зависимость разности потенциалов между выводами резистора от протекшего заряда. Каждая маленькая порция заряда перетекает при своей разности потенциалов, т.е. площадь выделенной полоски – это элементарная работа электрических сил (по определению разности потенциалов). А для резистора эта работа – просто выделившееся тепло. Суммарная площадь, а площадь треугольника все умеют находить, это половина произведения начальной разности потенциалов (один катет) и найденного перетекшего заряда (второй катет).

Обратите внимание, что процесс перетекания заряда бесконечно долгий. Если рисовать график зависимости тока через резистор от времени, получится экспонента (для этого еще уравнение дифференциальное надо решить!), потом еще надо нарисовать квадрат этого графика, умножить на  $r$  (чтобы получить мощность), а потом найти площадь – проинтегрировать.

Итак, способ рисования зависимости разности потенциалов от протекшего заряда (не от времени, а от заряда!) приводит всегда к линейной зависимости. Я говорю школьникам: докажите, пожалуйста, что такого рода графики всегда имеют линейный характер. Это хорошая задачка для домашних размышлений. Вообще, если я хочу им дать какую-то полезную задачу, которую решать в классе нудно и долго, а может быть, и не очень нужно, ее вполне можно дать на дом для размышлений. В конце концов, если человек ее не сделает, он хоть результат запомнит – тоже хорошее дело.

Вот еще пример, который очень нудно решается в общем случае, а приведенный способ работает хорошо.

### Неправильно заряженный конденсатор

Пусть большой плоский конденсатор летает вдали от всех проводников и заряженных тел, т.е. в глубинах космоса. Емкость его  $C$ , а заряжен он неправильно – заряд одной пластины  $Q_1$ , заряд второй  $Q_2$  (рис.13). В общем случае сумма зарядов не равна нулю.

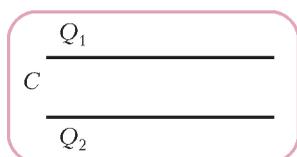


Рис. 13

Кстати, очень интересный вопрос для разумных детей – а почему обычно при зарядке конденсатора получается  $Q$  и  $-Q$ ? Как так получается? Почему нельзя зарядить конденсатор – а может быть, все-таки можно? – зарядами  $Q$  и

$-3Q$ , например? На самом деле, конечно же, можно. Самый изящный способ предложил один из моих учеников когда-то очень давно, мне очень понравилось, я с тех пор это повторяю. Он начал решение со слов: возьмем два конденсатора, один зарядим обычным образом зарядами  $Q$  и  $-Q$ , другой – зарядами  $3Q$  и  $-3Q$ , а потом поменяем местами обкладки. Одну обкладку одного и одну обкладку другого. Изящно, согласитесь.

Понятно, что разбирать конденсатор на части – не королевское дело. Но почему не зарядить конденсатор зарядами  $Q$  и  $2Q$ , например? А не получается легко. В чем идея применения конденсатора? Мы берем обычный проводник, заряжаем его, у него очень быстро растет при этом потенциал. Емкость проводника обычных размеров очень мала. Здесь, кстати, полезно посчитать, как все и делают, емкость земного шара как проводника – получается совсем немножко, меньше одной тысячной фарада. Иными словами, обычные проводники имеют очень маленькую емкость, значит, по мере зарядки очень быстро растет потенциал. Все труднее и труднее приносить следующие порции заряда. А вот очень простая идея конденсатора – давайте переносить заряды с одного проводника на другой. А чтобы это было проще и дешевле, поместим проводники близко друг к другу. Возьмем, например, две большие близкие плоскости. Мы таскаем заряды на очень маленькие расстояния, совершая при этом скромную работу. При этом емкость конденсатора может быть сделана очень большой.

А чем отличаются друг от друга разные конденсаторы, зачем их так много разных? И вообще, зачем они нужны...? Это – отдельный интересный разговор, я его всегда со своими учениками веду. Школьники, ну почти все, умеют, например, рассчитать сопротивление параллельно соединенных проводников. Нехитрое дело. Но спросите их – зачем соединяют проводники параллельно? Это жуткий вопрос, это так трудно оказывается. Школьное образование так и устроено. Про транзистор школьнику рассказывают так, как будто вот на кустах растут транзисторы и нам нужно поймать такой транзистор и изучить его повадки. А ведь его делают для определенных целей. Конденсаторы – зачем их так много? Это интересный вопрос. Я стараюсь даже очень математизированных школьников грузить не только математикой. Есть очень много интересных вещей. Особенно это выглядит эффектно, когда я вынимаю из кармана горсть разных конденсаторов, и даже самые закоренелые математики с удовольствием и некоторой опаской берут их в руки и начинают рассматривать. Это первый этап изучения физики, я считаю.

Итак, пусть нам удалось зарядить наш конденсатор таким странным образом, т.е. зарядами пластин  $Q_1$  и  $Q_2$ . Соединим обкладки проводничком. Мне проще это сопротивление задать, но от него ответ зависеть не будет. Я сейчас скажу, какой будет вопрос, чтобы ответ не зависел. Проще задать лишние данные, чем всем долго и подробно объяснять, почему это не важно. Тем более, что я могу легко задать вопрос, куда это сопротивление все-таки войдет. Три вопроса в этой задаче. Какой ток потечет сразу после включения (вот тут мне понадобится значение этого сопротивления)? Какой полный заряд перетечет? И сколько про этом выделится тепла?

Практика показывает, что это ужасно трудная задача. Вот формальный способ решения. Предположим, что к

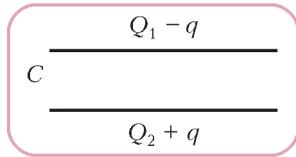


Рис. 14

некоторому моменту успел перетечь заряд  $q$ . Тогда заряды пластин получились такими:  $Q_1 - q$  и  $Q_2 + q$  (рис. 14). Найдем разность потенциалов между пластинами. Первая пластина создает в простран-

стве между пластинами поле напряженностью  $\frac{Q_1 - q}{2\epsilon_0 S}$ ,

вторая – направленное навстречу поле напряженностью

$\frac{Q_2 + q}{2\epsilon_0 S}$ . Если мы умножим разность этих величин (суммарное поле) на  $d$  (расстояние между пластинами), это и будет  $\Delta\phi$ . Сразу получится такой же график зависимости  $\Delta\phi$  от протекшего заряда  $q$ , с каким мы уже имели дело. И мгновенно получается ответ. Во-первых, видно, при каком  $q$  разность потенциалов обращается в ноль – это формальный признак окончания процесса. А площадь под графиком – это выделившееся количество теплоты. И все.

Таким образом, задача, как видите, просто решается формальным способом, а на самом деле она сложная. Неформальное решение этой задачи заставляет говорить вот о чем. При перетекании заряда с одной пластины на другую поле снаружи практически остается прежним (если эти пластины большие и близко расположены друг к другу). Значит, в тепло переходит энергия внутренней области. А какое там поле? Такое, как если бы конденсатор был заряжен чуть другими зарядами – легко понять, какими. Между прочим, к любой части этого рассуждения легко придаться. Давайте придеремся. Поле снаружи не меняется, почти не меняется. Зато это «снаружи» очень большое. Энергия поля снаружи от системы пластин во много раз превышает энергию поля внутри. Даже очень маленькое изменение этой большой энергии (а уж какое-нибудь маленькое вполне может произойти при перетекании заряда) полностью изменит ответ. Честное слово, трудно отбиться от такой претензии. А рассмотренный способ обходит все эти проблемы. Тут, конечно, присутствует некоторый обман: когда я пользуюсь формулами для бесконечных пластин. Автоматически я предполагаю, что поле снаружи не меняется. Но к этому придаться намного труднее. По крайней мере, надо понимать, к чему придаться. Школьники такое решение воспринимают.

Не знаю, как вам, мне очень часто везет на вездыхловых школьников. Они придираются ко всякого рода математически не очень понятным или не очень корректным операциям. Они привыкли, что в математике все строго. Мне очень не хотелось бы, чтобы при изучении физики у них возникало ощущение, что вот кончилась наука, началась помойка, где все рассуждения неправильные, некорректные и вообще «это следует из эксперимента». Если все следует из эксперимента, то получается какая-то география вместо физики. Мне это не нравится. Конечно, хочется рассказывать красивый, логичный предмет. И до самой квантовой механики это удастся в школе сделать. Дальше, конечно, там начинается ужас всякий. А вот до этого получается все строго, красиво. А в электростатике еще и ощущение научности возникает.

А сейчас я приведу вам пример такой полезной, как мне кажется, вещи. Я докажу теорему единственности в электростатике.

### Теорема единственности

Вопрос: можно ли обойтись без теоремы единственности в электростатике? В общем, да. В школе как-то обходятся много лет, и прекрасно все. С другой стороны, любая задача сводится в конце концов к утверждению этой теоремы. Скажем, мы взяли уединенный проводник, зарядили его, потенциал этого проводника пропорционален его заряду. Нормальный школьник понимает. А вездыхлов спрашивает: а почему? И через два цикла рассуждений вы все равно сошлетесь на теорему единственности. Без нее ни одна задача электростатики до конца не решается. И ужасно обидно, если она осталась недоказанной.

Итак, приведем школьное доказательство теоремы единственности. Вначале – формулировка этой теоремы. Ее можно привести в одном из двух видов. Первый вид такой:

*Возьмем проводник и нанесем на него заряд. Этот заряд распределяется по поверхности проводника единственно возможным образом.*

Неудобный вариант формулировки, но я его в любом случае произношу. А вездыхловым школьникам предлагаю доказать это самим дома.

По-другому сказать можно так. Нанесем на проводник еще одну, например такую же, порцию заряда. Вторая порция распределится по поверхности точно тем же способом, что и первая. Иными словами, существует единственный вариант распределения заряда. Например, если это сферический проводник и вы нанесли на него заряд, то как он распределится по поверхности? Для сферы – равномерно. И это единственный возможный вариант. А если это не сфера, если это чемодан? Распределится другим способом. Это ужасно трудно посчитать, но это будет все равно единственно возможное распределение.

Другая формулировка теоремы единственности – формальная, очень удобная. И именно ее я собираюсь доказывать. Рассмотрим поверхность нулевого потенциала. Впрочем, не обязательно нулевого, можно любого потенциала  $\phi_0$ , одинакового во всех точках этой поверхности (рис. 15). Это – эквипотенциальная поверхность. Поле, которое дает такую

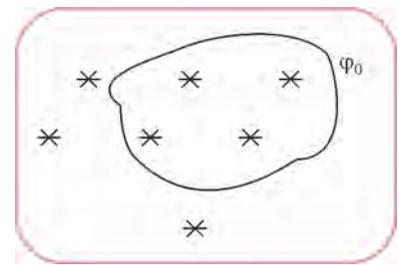


Рис. 15

форму поверхности, создается множеством зарядов. Некоторые из них внутри находятся этой поверхности, некоторые – снаружи. Конечно, имеется в виду полное поле. От всех зарядов.

Теперь – сама теорема о единственности во втором ее виде:

*Допустим, что я нашел другое распределение внешних зарядов – взял другие заряды, расположил в других местах. При этом внутренние заряды остались на своих местах, и их не прибавилось, и потенциал поверхности остался тем же самым  $\phi_0$ . Тогда поле в любой точке внутри поверхности не изменилось.*

При чем здесь единственность? Поле внутри эквипотенциальной поверхности определяется только внутренними зарядами. Ну, это неправильно, но понятно. Теперь вопрос: а не пустые ли это рассуждения? А можно ли изменить наружные заряды так, чтобы потенциал остался прежним? Есть ли хотя бы один пример? А вдруг это все – теорема о пустом множестве? Красивая теорема, но только таких случаев не бывает? Было бы обидно, согласитесь. Оказывается, легко привести пример. И пример должен быть простым.

Допустим, имеется сфера, заряженная зарядом  $Q$  (рис.16,а). Какой будет потенциал у точек этой сферы?

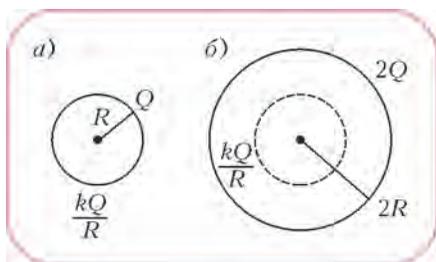


Рис. 16

Мы знаем его. Это  $kQ/R$ . Можно ли вместо этих зарядов нарисовать другие заряды, снаружи от сферы, но так, чтобы потенциал этой сферы был таким же? Можно. Например, распределим заряд  $2Q$  по сфере радиусом  $2R$  (рис.16,б). Иными словами, принципиально такая вещь возможна. Идея: может быть, в сложных случаях мне удастся наружные заряды переставить так, чтобы проще все было посчитать? А если эта теорема справедлива, то есть гарантия, что поле внутри останется тем же самым. Такие примеры разумные ребятишки приводят с ходу.

Пусть имеется точечный заряд  $Q$  около проводящей плоскости (рис.17). И надо рассчитать поле в какой-нибудь точке  $A$ , например. Обратите внимание, это убийственно сложная задача. Плоскость зарядится обязательно, правда? На плоскости заряды распределяться некоторым сложным образом. Для того чтобы найти нужное поле, мне придется вначале рассчитать распределение этих зарядов (это само по себе – очень противная задача), а потом найти суммарное поле этой сложной системы зарядов. Нельзя ли вместо сложной системы зарядов на плоскости нарисовать чего-нибудь

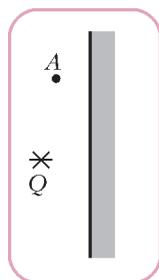


Рис. 17

попроще, только бы новые заряды не находились слева от плоскости – чтобы не портить «внутреннюю» область? Легко. Потенциал этой плоскости равен нулю – она уходит в бесконечность, где гарантированно нулевой потенциал. Если я к заряду  $Q$  симметрично относительно плоскости нарисую заряд  $-Q$ , а сам проводник уберу, то потенциал точек границы останется нулевым. Поле слева будет таким же, как от исходной системы «заряд–проводящая плоскость». Я заменил сложную систему зарядов простым зарядом, и мне удалось при этом все посчитать. Конечно, если справедлива теорема единственности.

Формулировок теоремы единственности – больше, чем

две. Можно еще формулировать. Но обычно для школьников достаточно этих двух. Они имеют прямое отношение к задачам, которые мы хотим решать. Теперь – обещанное доказательство. Оно красивое и очень простое.

Рассмотрим эквипотенциальную поверхность с потенциалом  $\Phi_0$ , заряды  $q_1, q_2$  – внутренние заряды,  $Q_1, Q_2$  – это представители наружного семейства (рис.18). Я хочу доказать, что если я возьму другое распределение наружных зарядов, сохраняющее потенциал поверхности тем же самым, то поле внутри поверхности будет таким же, как и в первом случае.

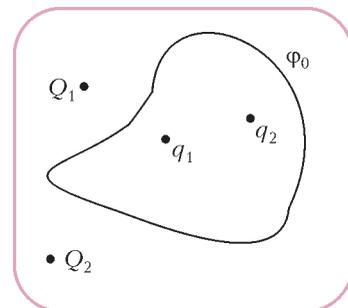


Рис. 18

Докажем эту теорему от противного. Предположим, что я нашел другую систему наружных зарядов, назовем их  $Q_1^*, Q_2^*$  и т.д. Внутренние заряды остались теми же самыми, потенциал на границе – тот же самый. Предположим, что теорема не выполняется, т.е. я нашел какую-то точку внутри, в которой поле изменилось. Докажем, что этого не может быть. Для этого придется доказать... или, скажем так, обсудить совершенно простое утверждение. Пусть имеется замкнутая поверхность нулевого потенциала Или любого постоянного, что, впрочем, одно и то же. Внутри зарядов нет. Поле любой точки внутри этой поверхности равно нулю. Нарисуем картину силовых линий. Они не могут начинаться и кончаться внутри этой поверхности – там нет зарядов. Они не могут идти от одной точки поверхности к другой, потому что эти точки имеют одинаковые потенциалы.

Между прочим, строго доказать это утверждение довольно трудно. Но оно такое простое, что проскальзывает как-то. Вообще, у меня с моими школьниками есть определение того, что такое очевидное утверждение. Это утверждение, во-первых, правильное, а во-вторых, я не могу его доказать. Значит, оно очевидное. Хороший способ. Так вот, то, что внутри пустой поверхности постоянного потенциала поля нет, – это очевидное утверждение.

Продолжим доказательство (мы уже почти все сделали). Теперь изменим знаки всех зарядов (и внешних  $Q_1^*, Q_2^*$ , и внутренних  $q_1, q_2$ ) на противоположные. Тогда поле в любой точке просто изменит направление на противоположное. Потенциал поверхности станет равным  $-\Phi_0$ . А затем давайте я наложу эти две системы зарядов друг на друга, одновременно расположив их в пространстве. Посмотрите, что получается. Внутренние заряды исчезли: к каждому внутреннему заряду добавился такой же противоположного знака. Потенциал границы стал нулем. Если поля внутри не совпадали, то где-то внутри останется ненулевое поле. А это противоречит тому, что мы только что обсуждали: внутри поверхности зарядов нет, потенциал поверхности постоянен (равен нулю), следовательно, внутри поля не может быть.

(Продолжение см. на с. 56)

# Региональный этап XLII Всероссийской олимпиады школьников по математике

Региональный этап XLII Всероссийской олимпиады по математике был проведен 5 и 6 февраля 2016 года. По его результатам формируется состав участников заключительного этапа Всероссийской олимпиады, поэтому в варианты регионального этапа включались, в том числе, и достаточно сложные задачи. Наиболее трудными оказались задачи 8 для 10 класса и для 11 класса.

## Задачи

### 9 класс

#### Первый день

1. Даны квадратные трехчлены  $f_1(x), f_2(x), \dots, f_{100}(x)$  с одинаковыми коэффициентами при  $x^2$ , одинаковыми коэффициентами при  $x$ , но различными свободными членами; у каждого из них есть по два корня. У каждого трехчлена  $f_i(x)$  выбрали один корень и обозначили его через  $x_i$ . Какие значения может принимать сумма  $f_2(x_1) + f_3(x_2) + \dots + f_{100}(x_{99}) + f_1(x_{100})$ ?

*Н.Агаханов*

2. Дан равнобедренный треугольник  $ABC$ ,  $AB = BC$ . В окружности  $\Omega$ , описанной около треугольника  $ABC$ , проведен диаметр  $CC'$ . Прямая, проходящая через точку  $C'$  параллельно  $BC$ , пересекает отрезки  $AB$  и  $AC$  в точках  $M$  и  $P$  соответственно. Докажите, что  $M$  – середина отрезка  $C'P$ .

*Б.Обухов*

3. Петя выбрал несколько последовательных натуральных чисел и каждое записал либо красным, либо синим карандашом (оба цвета присутствуют). Может ли сумма наименьшего общего кратного всех красных чисел и наименьшего общего кратного всех синих чисел являться степенью двойки?

*О.Дмитриев, Р.Женодаров*

4. У царя Гиерона есть 11 металлических слитков, неразличимых на вид; царь знает, что их массы (в некотором порядке) равны 1, 2, ..., 11 кг. Еще у него есть мешок, который порвется, если в него положить больше 11 кг. Архимед узнал массы всех слитков и хочет доказать Гиерону, что первый слиток имеет массу 1 кг. За один шаг он может загрузить несколько слитков в мешок и продемонстрировать Гиерону, что мешок не порвался (рвать мешок нельзя!). За какое наименьшее число загрузок мешка Архимед может добиться требуемого?

*И.Богданов, К.Кноп*

#### Второй день

5. В классе учатся 23 человека. В течение года каждый ученик этого класса один раз праздновал день рождения, на который пришли некоторые (хотя бы один, но не все) его одноклассники. Могло ли оказаться, что каждые два ученика этого класса встретились на таких празднованиях одина-

ковое число раз? (Считается, что на каждом празднике встретились любые два гостя, а также что именинник встретился со всеми гостями.)

*И.Богданов*

6. Назовем непустое (конечное или бесконечное) множество  $A$ , состоящее из натуральных чисел, *полным*, если для любых натуральных  $a$  и  $b$  (не обязательно различных и не обязательно лежащих в  $A$ ) таких, что  $a + b$  лежит в  $A$ , число  $ab$  также лежит в  $A$ . Найдите все полные множества натуральных чисел.

*Н.Агаханов*

7. В белой таблице  $2016 \times 2016$  некоторые клетки окрасили черным. Назовем натуральное число  $k$  *удачным*, если  $k \leq 2016$  и в каждом из клетчатых квадратов со стороной  $k$ , расположенных в таблице, окрашено ровно  $k$  клеток. (Например, если все клетки черные, то удачным является только число 1.) Какое наибольшее количество чисел могут быть удачными?

*Е.Бакаев*

8. Дан выпуклый четырехугольник  $ABCD$ , в котором  $\angle DAB = 90^\circ$ . Пусть  $M$  – середина стороны  $BC$ . Оказалось, что  $\angle ADC = \angle BAM$ . Докажите, что  $\angle ADB = \angle CAM$ .

*Е.Бакаев*

### 10 класс

#### Первый день

1. См. задачу 1 для 9 класса.

2. Петя выбрал 10 последовательных натуральных чисел и каждое записал либо красным, либо синим карандашом (оба цвета присутствуют). Может ли сумма наименьшего общего кратного всех красных чисел и наименьшего общего кратного всех синих чисел оканчиваться на 2016?

*О.Дмитриев, Р.Женодаров*

3. На стороне  $AB$  выпуклого четырехугольника  $ABCD$  взяты точки  $K$  и  $L$  (точка  $K$  лежит между  $A$  и  $L$ ), а на стороне  $CD$  взяты точки  $M$  и  $N$  (точка  $M$  между  $C$  и  $N$ ). Известно, что  $AK = KN = DN$  и  $BL = BC = CM$ . Докажите, что если  $BCNK$  – вписанный четырехугольник, то и  $ADML$  тоже вписан.

*Т.Зиманов, П.Кожевников*

4. Дана клетчатая таблица  $100 \times 100$ , клетки которой покрашены в черный и белый цвета. При этом во всех столбцах поровну черных клеток, в то время как во всех строках разные количества черных клеток. Каково максимальное возможное количество пар соседних по стороне разноцветных клеток?

*И.Богданов*

#### Второй день

5. Назовем непустое (конечное или бесконечное) множество  $A$ , состоящее из действительных чисел, *полным*, если

для любых действительных  $a$  и  $b$  (не обязательно различных и не обязательно лежащих в  $A$ ) таких, что  $a + b$  лежит в  $A$ , число  $ab$  также лежит в  $A$ . Найдите все полные множества действительных чисел.

*Н.Агаханов*

6. Внутри равнобокой трапеции  $ABCD$  с основаниями  $BC$  и  $AD$  расположена окружность  $\omega$  с центром  $I$ , касающаяся отрезков  $AB$ ,  $CD$  и  $DA$ . Окружность, описанная около треугольника  $BIC$ , вторично пересекает сторону  $AB$  в точке  $E$ . Докажите, что прямая  $CE$  касается окружности  $\omega$ .

*Б.Обухов*

7. См. задачу M2418 «Задачника «Кванта».

8. Найдите все пары различных действительных чисел  $x$  и  $y$  такие, что  $x^{100} - y^{100} = 2^{99}(x - y)$  и  $x^{200} - y^{200} = 2^{199}(x - y)$ .

*И.Богданов*

### 11 класс

#### Первый день

1. Квадратный трехчлен  $f(x) = ax^2 + bx + c$ , не имеющий корней, таков, что коэффициент  $b$  рационален, а среди чисел  $c$  и  $f(c)$  ровно одно иррациональное. Может ли дискриминант трехчлена  $f(x)$  быть рациональным?

*Г.Жуков*

2. Положительные числа  $x$ ,  $y$  и  $z$  удовлетворяют условию  $xyz \geq xy + yz + zx$ . Докажите неравенство

$$\sqrt{xyz} \geq \sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z}.$$

*А.Храбров*

3. В треугольнике  $ABC$  проведена биссектриса  $BL$ . На отрезке  $CL$  выбрана точка  $M$ . Касательная в точке  $B$  к

окружности  $\Omega$ , описанной около треугольника  $ABC$ , пересекает луч  $CA$  в точке  $P$ . Касательные в точках  $B$  и  $M$  к окружности  $\Gamma$ , описанной около треугольника  $BLM$ , пересекаются в точке  $Q$ . Докажите, что прямые  $PQ$  и  $BL$  параллельны.

*А.Кузнецов*

4. Есть клетчатая доска  $2015 \times 2015$ . Дима ставит в  $k$  клеток по детектору. Затем Коля располагает на доске клетчатый корабль в форме квадрата  $1500 \times 1500$ . Детектор в клетке сообщает Диме, накрыта эта клетка кораблем или нет. При каком наименьшем  $k$  Дима может расположить детекторы так, чтобы гарантированно восстановить расположение корабля?

*О.Дмитриев, Р.Женодаров*

#### Второй день

5. См. задачу 5 для 10 класса.

6. В пространстве расположены 2016 сфер, никакие две из них не совпадают. Некоторые из сфер – красного цвета, а остальные – зеленого. Каждую точку касания красной и зеленой сфер покрасили в синий цвет. Найдите наибольшее возможное количество синих точек.

*А.Кузнецов*

7. См. задачу 7 для 10 класса.

8. Натуральное число  $N$  представляется в виде  $N = a_1 - a_2 = b_1 - b_2 = c_1 - c_2 = d_1 - d_2$ , где  $a_1$  и  $a_2$  – квадраты,  $b_1$  и  $b_2$  – кубы,  $c_1$  и  $c_2$  – пятые степени, а  $d_1$  и  $d_2$  – седьмые степени натуральных чисел. Обязательно ли среди чисел  $a_1$ ,  $b_1$ ,  $c_1$  и  $d_1$  найдутся два равных?

*А.Голованов*

Публикацию подготовили Н.Агаханов, И.Богданов, П.Кожевников, О.Подлипский

# Региональный этап XLX Всероссийской олимпиады школьников по физике

## Теоретический тур

### 9 класс

#### Задача 1. Минимальный путь

Модель автомобиля, едущая со скоростью  $v_0$ , в некоторый момент начинает движение с таким постоянным ускорением, что за время  $\tau$  пройденный ею путь  $s$  оказывается минимальным. Определите этот путь  $s$ .

*В.Слободянин*

#### Задача 2. Отражение в полете

В баллистической лаборатории при проведении эксперимента по изучению упругого отражения от движущихся препятствий производился выстрел маленьким шариком из небольшой катапульты, установленной на горизонтальной поверхности. Одновременно из точки, в которую по расчетам должен был упасть шарик, с постоянной скоростью начинала движение навстречу массивная вертикальная стенка (рис.1).

После упругого отражения от стенки шарик падал на некотором расстоянии от катапульты. Затем эксперимент повторяли, изменяя *только* скорость движения стенки. Оказалось, что в двух экспериментах удар шарика о стенку произошел на одной и той же высоте  $h$ . Определите эту высоту, если известно, что время полета шарика до отражения в первом случае составило  $t_1 = 1$  с, а во втором  $t_2 = 2$  с. На какую максимальную высоту  $H$  поднимался шарик за весь полет? Чему равна начальная скорость шарика  $v$ , если расстояние между местами его падения на горизонтальную поверхность в первом и во втором экспериментах составило  $L = 9$  м? Определите скорости равномерного движения стенки  $u_1$  и  $u_2$  в этих

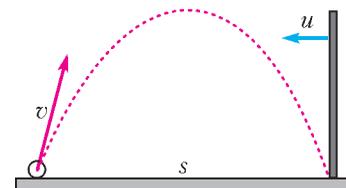


Рис. 1

экспериментах и начальное расстояние  $s$  между стенкой и катапультной. Считайте  $g = 10 \text{ м/с}^2$ .

*Примечание.* В системе отсчета, связанной со стенкой, модули скорости шарика до и после столкновения одинаковы, а угол отражения шарика равен углу падения.

*М.Замятнин*

**Задача 3. Трехцилиндровый**

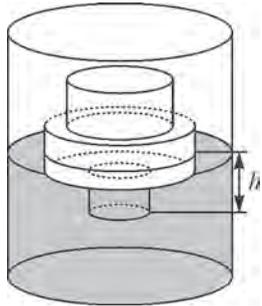


Рис. 2

Тело, склеенное из трех соосных цилиндров разного поперечного сечения и разной высоты (рис.2), погружают в некоторую жидкость и снимают зависимость силы Архимеда  $F_A$ , действующей на тело, от глубины  $h$  его погружения (табл.1). Известно, что площадь сечения самого узкого (не факт, что самого нижнего) цилиндра  $S = 10 \text{ см}^2$ . Постройте график зависимости  $F_A(h)$  и с его помощью определите высоту каждого из ци-

Таблица 1

$h, \text{см}$	0	1	3	6	8	11	12	13	15
$F_A, \text{Н}$	0	0,3	0,9	1,8	2,4	3,6	4,2	4,8	6,0
$h, \text{см}$	17	18	20	21	22	23	25	27	
$F_A, \text{Н}$	7,2	7,3	7,5	7,6	7,7	7,8	7,9	7,9	

линдров, площади сечения двух других цилиндров и плотность жидкости. В процессе эксперимента ось вращения цилиндров оставалась вертикальной,  $g = 10 \text{ м/с}^2$ .

*З.Гордеев*

**Задача 4. Два в кубе**

Куб собран из одинаковых резисторов, имеющих сопротивление  $R$ . Два резистора заменены на идеальные перемычки, как показано на рисунке 3.

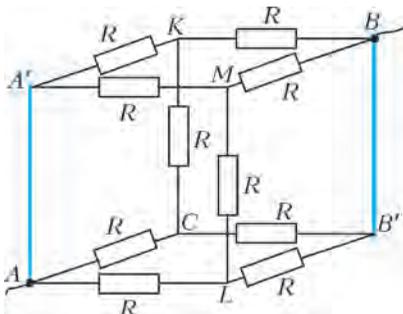


Рис. 3

на рисунке 3.

1) Найдите общее сопротивление получившейся системы между контактами  $A$  и  $B$ .

2) Какие резисторы из оставшихся можно убрать, чтобы это не изменило общее сопротивление системы?

3) Если известно, что через большинство резисторов в цепи течет ток  $I = 2 \text{ А}$ , то какова сила тока в проводе, подсоединенном к узлу  $A$  (или  $B$ )?

4) Вычислите силу тока, текущего через идеальную перемычку  $AA'$ .

*М.Иванов*

**Задача 5. Ледяное пятно**

Определите, какая максимальная масса  $m_{\text{п max}}$  водяного пара, взятого при температуре  $100 \text{ }^\circ\text{C}$ , может потребоваться для нагревания льда, находящегося в калориметре, до температуры плавления (без плавления). Масса льда и его начальная температура не известны, но эти значения могут лежать в выделенной на диаграмме области (рис.4). Удельная теплота парообразования воды  $L = 2,30 \text{ МДж/кг}$ , удельная теплота плавления льда  $\lambda = 340 \text{ кДж/кг}$ , удельная теплоемкость воды  $c = 4200 \text{ Дж/(кг}\cdot^\circ\text{C)}$ , удельная

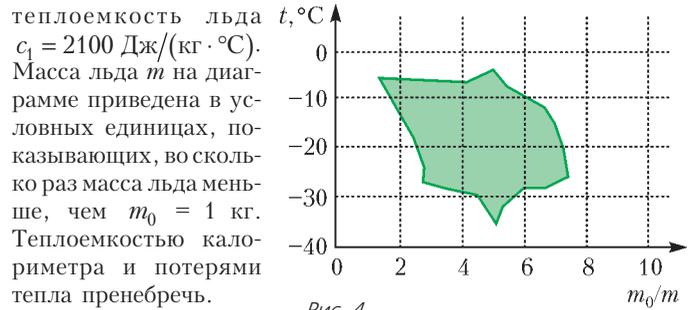


Рис. 4

теплоемкость льда  $c_1 = 2100 \text{ Дж/(кг}\cdot^\circ\text{C)}$ . Масса льда  $m$  на диаграмме приведена в условных единицах, показывающих, во сколько раз масса льда меньше, чем  $m_0 = 1 \text{ кг}$ . Теплоемкостью калориметра и потерями тепла пренебречь.

*М.Замятнин*

10 класс

**Задача 1. Время мощности**

В результате проведенного эксперимента получена зависимость мощности  $N$  постоянной горизонтальной силы от времени  $t$  ее действия на изначально покоящийся на гладком горизонтальном столе брусок массой  $m = 2 \text{ кг}$  (табл.2). Некоторые измерения могли оказаться не очень точными.

Таблица 2

$N, \text{Вт}$	1,4	2,8	4,5	5,0	6,0	10,4	14,7	16,6	18,3
$t, \text{с}$	1,0	1,5	2,0	2,5	3,2	5,0	7,2	8,4	9,0

- 1) Определите мощность силы в момент времени  $\tau = 6 \text{ с}$ .
- 2) Найдите значение силы  $F$ .

*З.Гордеев*

**Задача 2. В лунке**

Стержень  $AB$  касается уступа  $K$  полусферической лунки радиусом  $R$  (рис.5). Точка  $A$  движется равномерно со скоростью  $v$  по поверхности лунки, начиная из нижней точки  $N$ , к точке  $M$ . Найдите зависимость модуля скорости  $u$  конца стержня  $B$  от угла  $\alpha$ , который стержень составляет с горизонтом. Длина стержня  $AB$  равна  $2R$ .

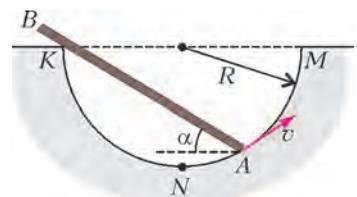


Рис. 5

*А.Бычков*

**Задача 3. Вода со льдом**

В калориметре смешали некоторое количество воды и льда. Их точные массы и начальные температуры не известны, но эти значения лежат в выделенных на диаграмме заштрихованных областях (рис.6). Найдите максимальное количество теплоты, которое могло быть передано водой льду, если после установления теплового равновесия масса льда не изменилась. Определите возможную массу содержимого калориметра в этом случае. Удельная теплота плавления льда  $\lambda = 340 \text{ кДж/кг}$ , удельная теплоемкость воды  $c = 4200 \text{ Дж/(кг}\cdot^\circ\text{C)}$ , удельная теплоемкость льда  $c_1 = 2100 \text{ Дж/(кг}\cdot^\circ\text{C)}$ . Массы воды и льда на диаграмме приведены в условных единицах, показывающих, во сколько раз их массы меньше, чем  $m_0 = 1 \text{ кг}$ . Теплоемкостью калориметра и потерями тепла пренебречь.

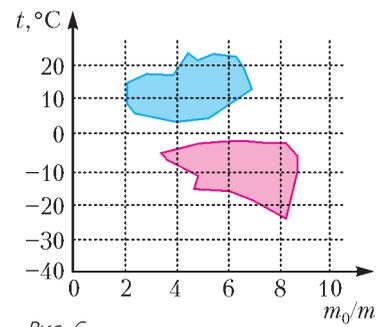


Рис. 6

*М.Замятнин*

**Задача 4. Три в кубе**

Куб собран из одинаковых резисторов сопротивлением  $R$ . Три резистора заменили на идеальные перемычки, как указано на рисунке 7.

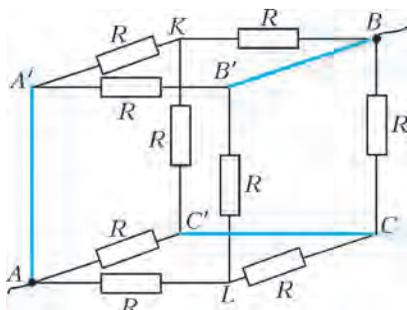


Рис. 7

- 1) Найдите общее сопротивление получившейся системы между контактами  $A$  и  $B$ .
- 2) Какие резисторы из оставшихся можно убрать так, что это не изменит общее сопротивление системы?
- 3) Если известно, что сила тока, текущего через большинство резисторов электрической цепи, равна  $I = 2$  А, то какова сила тока в проводе, подсоединенном к узлу  $A$  (или  $B$ )?
- 4) Вычислите силу тока, текущего через идеальную перемычку  $AA'$ .

*М.Иванов*

**Задача 5. Транспортер на боку**

По шероховатому горизонтальному полу движется лежащий на боку ленточный транспортер так, что плоскость ленты вертикальна (рис.8, вид сверху). Скорость ленты

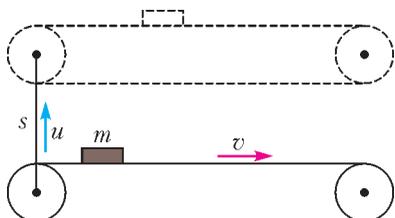


Рис. 8

транспортера  $v$ . Транспортер перемещается по полу с постоянной скоростью  $u$  перпендикулярно основным участкам его ленты. За некоторое время транспортер сместился на расстояние  $s$ . Транспортер толкает по полу брусок массой  $m$ , имеющий форму прямоугольного параллелепипеда. Пренебрегая прогибом ленты и считая движение бруска установившимся, найдите смещение бруска за время  $s/u$ . Определите работу по перемещению бруска, совершаемую силой, действующей на брусок со стороны транспортера (за время смещения транспортера на расстояние  $s$ ). Коэффициент трения между бруском и полом  $\mu_1$ , а между бруском и лентой  $\mu_2$ .

*А.Фролов*

11 класс

**Задача 1. Мощность в пространстве**

На изначально покоящийся на гладком горизонтальном столе брусок массой  $m = 2$  кг начали действовать постоянной горизонтальной силой  $F$ . В результате была получена зависимость мощности  $N$  от перемещения  $s$  бруска (табл.3). Некоторые измерения могли оказаться не очень точными. В

Таблица 3

$N, \text{Вт}$	0,28	0,40	0,57	0,75	1,02	1,10	1,23	1,26	1,50
$s, \text{см}$	1,0	2,0	4,0	7,0	13	15	19	20	30

каких координатных осях экспериментальная зависимость мощности от перемещения линейна? Определите мощность силы в точке с координатой  $s_0 = 10$  см. Найдите значение силы  $F$ .

*З.Гордеев*

**Задача 2. «Темная материя»**

Скопления звезд образуют бесстолкновительные системы – галактики, в которых звезды равномерно движутся по круговым орбитам вокруг оси симметрии системы. Галактика NGC 2885 (рис.9) состоит из скопления звезд в виде



Рис. 9

шарового ядра радиусом  $r_{\text{я}} = 4$  кпк и тонкого кольца, внутренний радиус которого совпадает с радиусом ядра, а внешний равен  $15r_{\text{я}}$ . Кольцо состоит из звезд с пренебрежимо малой по сравнению с ядром массой. В ядре звезды распределены равномерно.

Было установлено, что линейная скорость движения звезд в кольце не зависит от расстояния до центра галактики: от внешнего края кольца вплоть до края ядра скорость звезд  $v_0 = 240$  км/с. Такое явление может быть объяснено наличием несветящейся массы, или «темной материи», распределенной сферически симметрично относительно центра галактики вне ее ядра.

- 1) Определите массу  $M_{\text{я}}$  ядра галактики.
- 2) Определите среднюю плотность  $\rho_{\text{я}}$  вещества ядра галактики.
- 3) Найдите зависимость плотности «темной материи»  $\rho_{\text{т}}$  от расстояния  $r$  до центра галактики.
- 4) Вычислите отношение массы «темной материи», влияющей на движение звезд в диске, к массе ядра.

*Примечание:* 1 кпк = 1 килопарсек =  $3,086 \cdot 10^{19}$  м, гравитационная постоянная  $G = 6,67 \cdot 10^{-11}$  Н · м<sup>2</sup> · кг<sup>-2</sup>.

*П.Коротков*

**Задача 3. Четыре в кубе**

Куб собран из одинаковых резисторов, имеющих сопротивления  $R$ . Четыре резистора заменены на идеальные перемычки, как указано на рисунке 10.

- 1) Найдите общее сопротивление получившейся системы между контактами  $A$  и  $B$ .
- 2) Через какие резисторы сила текущего тока максимальна, а через какие минимальна? Найдите эти значения силы тока, если сила тока, входящего в узел  $A$ , равна  $I_0 = 1,2$  А.
- 3) Какова сила тока, текущего через идеальную перемычку  $AA'$ ?

*М.Иванов*

**Задача 4.Ромб**

Циклический процесс, совершаемый над идеальным га-

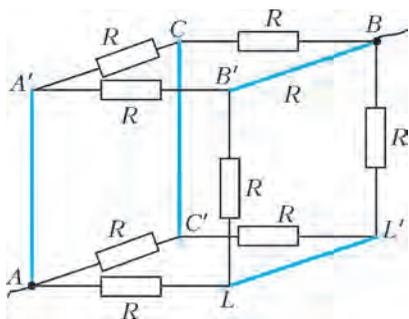


Рис. 10

зом, на плоскости  $p, V$  представляет собой ромб (рис.11). Вершины 1 и 3 лежат на одной изобаре, а вершины 2 и 4 – на одной изохоре. За цикл газ совершил работу  $A$ . На

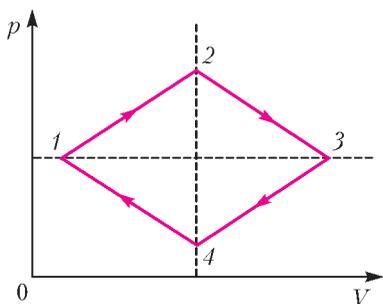


Рис. 11

сколько отличается количество теплоты  $Q_{12}$ , подведенное к газу на участке 1–2, от количества теплоты  $|Q_{3,4}|$ , отведенного от газа на участке 3–4?

*В.Слободянин*

**Задача 5. Колебаниям – нет!**

В электрической цепи, состоящей из резистора сопротивлением  $R$ , катушки индуктивностью  $L$  и конденсатора емкостью  $C_0$ , на конденсаторе находится заряд  $Q_0$  (рис.12). В некоторый момент времени замыкают ключ  $K$  и одновременно начинают изменять емкость конденсатора так, что идеаль-

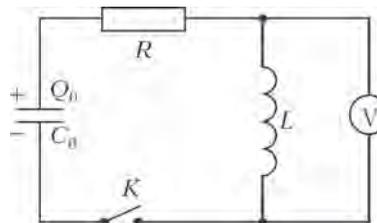


Рис. 12

ный вольтметр показывает постоянное напряжение.

1) Как зависит от времени емкость конденсатора  $C(t)$  при изменении времени от 0 до  $t_1 = \sqrt{C_0 L}$ ?

2) Какую работу за время  $t_1$  совершили внешние силы? Считайте, что  $t_1 = L/R = \sqrt{C_0 L}$ .

*Подсказка.* Количество теплоты, выделившееся на резисторе за время  $t_1$ , равно

$$W_R = \int_0^{t_1} I^2(t) R dt = \frac{Q_0^2}{3C_0}.$$

*М.Осин*

*Публикацию подготовил В.Слободянин*

**Электростатика для умных школьников**

*(Начало см. на с. 44)*

Итак, предположение о том, что поле внутри не осталось тем же самым, этим рассуждением опровергнуто. Мы доказали теорему единственности.

На самом деле, это длинный разговор. Если мне везет с классом, если они готовы такие вещи слушать, я им довольно много всего рассказываю. Пока не наступает явное переполнение, что, впрочем, видно по выражениям лиц и так далее. Мне кажется, что сложные вещи полезно обсуждать. Нужно обязательно, чтобы они развивались, чтобы они росли достаточно быстро – нагрузка должна быть близка (по сложности, не по объему) к некоторому предельному значению. Это значение у всех разное, поэтому я своих учеников грузю по-разному. А для того чтобы это не было так уж скучно, я работаю без домашних заданий, это довольно здорово облегчает ситуацию. По крайней мере, дает моральное право мне на уроке активно с учениками работать. И заставлять работать их.

Пользуясь теоремой единственности, мы решаем множество довольно трудных задач. Так, из нее сразу вылезает замечательный метод изображений. В школьной программе его нет, и прекрасно можно обойтись без этого

метода, но уж очень красивые задачи бывают. Красивые, понятные, трудные, любые. И кстати, один забавный короткий пример. С математически грамотными школьниками перед обсуждением этой темы я решаю такую задачу. Есть два точечных заряда, скажем  $q$  и  $-3q$ . Как расположены на плоскости точки, имеющие нулевой потенциал? Кроме бесконечно удаленных? Это интересная задача. Она пробивается в лоб, можно написать сложные, довольно противные соотношения. Почему я заговорил про математически образованных школьников? Они знают ответ и не решая этой задачи. Обычно сразу какое-нибудь быстро соображающее дитя кричит: «Окружность Аполлония!» Для того чтобы был у точки нулевой потенциал в нашем случае, она должна быть втрое дальше от большого заряда, чем от малого. Тогда сумма этих потенциалов дает ноль. А такую геометрическую фигуру они в геометрии изучают: как расположены на плоскости точки, которые втрое дальше от точки  $A$ , чем от точки  $B$ . Это окружность, окружность Аполлония. Значит, в пространстве это будет сфера. А мне это и нужно. Когда мы с ними докажем теорему единственности, мы вернемся к этим вопросам и решим задачу про изображение в сфере. Заряд и заземленная сфера: с какой силой они друг к другу притягиваются?..

# ОТВЕТЫ, УКАЗАНИЯ, РЕШЕНИЯ

## «КВАНТ» ДЛЯ МЛАДШИХ ШКОЛЬНИКОВ

### ЗАДАЧИ

(см. «Квант» №1)

1. Путь не через Зоопарк короче в 11 раз.

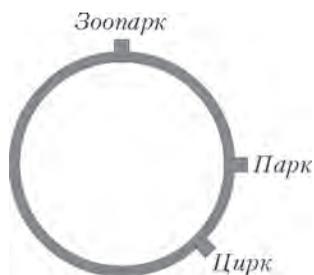


Рис. 1

От Парка до Зоопарка путь через Цирк втрое длиннее, чем путь не через Цирк. Вместе эти два пути составляют всю линию, поэтому длина первого из них – три четверти полного круга, а длина второго – четверть круга. Аналогично получаем, что путь от Цирка до Зоопарка через Парк – это треть круга. Значит, станции на линии расположены так, как показано на рисунке 1. Поэтому путь от Парка до Цирка не через Зоопарк равен  $\frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$  полного круга. Путь же через Зоопарк равен  $\frac{11}{12}$  круга, что в 11 раз длиннее.

2. 15.

Пример показан на рисунке 2.

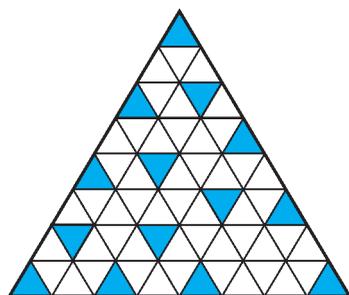


Рис. 2

Меньшим числом треугольничков не обойтись, так как всего точек пересечения линий  $1 + 2 + 3 + \dots + 9 = 15$ , а у треугольничка три вершины.

3. 2232331122323323132.

В слове РОБОТ пять букв, а в его закодированном виде 3112131233 десять цифр. Поэтому каждая буква кодируется двумя цифрами, которые определяются

без труда. Выпишем все двенадцать возможных кодов и те буквы, которые мы уже знаем:

$$\begin{array}{llll} 1 = 11 = & 21 = & 31 = & P \\ 2 = 12 = & 22 = & 32 = & \\ 3 = 13 = & 23 = & 33 = & T \end{array}$$

Теперь подумаем, как запишется слово КРОКОДИЛ = БЕГЕМОТ. Начинается оно с Б = 13, т.е. К = 1. Теперь мы можем записать начало слова: КРОКО... = 13112112... Начинаем его читать как слово БЕГЕМОТ: Б = 13, Е ≠ 1, т.е. Е = 11, а тогда Г = 2, иначе второе Е не получается. Ну а М начинается на 2, т.е. М = 2\*. Теперь посмотрим на конец слова: там стоит ...ОТ = ...1233. Это значит, что Л = 3 и И = 23, а Д заканчивается на 1, т.е. Д = \*1. Звездочка – единственная оставшаяся неразгаданной цифра. Разгадать ее нетрудно: 31 = Р, 11 = Е, так что Д = \*1 = 21. Тогда М = 22, и мы раскрыли почти весь шифр:

$$\begin{array}{llll} 1 = К & 11 = Е & 21 = Д & 31 = Р \\ 2 = Г & 12 = О & 22 = М & 32 = \\ 3 = Л & 13 = Б & 23 = И & 33 = Т \end{array}$$

Теперь, чтобы записать шифром слово МАТЕМАТИКА, не хватает только шифра для буквы А. Но раз Робот смог записать это слово, то для А есть код, и это может быть только 32, ибо все остальные коды уже использованы.

4. Один из возможных ответов приведен на рисунке 3 (пунктиром показана ось симметрии).

5. 24 девочки.

Действительно,  $22 + 30 = 52$ , значит,  $52 - 40 = 12$  детей держали за руку и мальчика, и девочку. Тогда  $30 - 12 = 18$  детей держали за руки только девочек. Эти 18 детей держали  $18 \cdot 2 = 36$  девчокиных рук, и еще 12 держали по одной девчокиной руке, так что всего у девочек было  $36 + 12 = 48$  рук. Стало быть, девочек было 24.

Попробуйте построить пример соответствующей расстановки детей в хороводе.

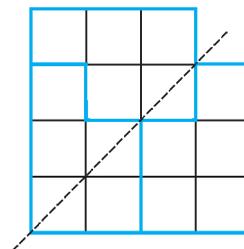


Рис. 3

## КОНКУРС ИМЕНИ А. П. САВИНА

(см. «Квант» №5-6 за 2015 г.)

6. 210, 211.

Пусть число  $N$  удачное,  $N = a_1 + a_2 + \dots + a_{20}$ , где  $a_1 < a_2 < \dots < a_{20}$  – натуральные слагаемые. Если предположить, что  $a_1 > 1$ , то  $N$  можно разбить в сумму различных натуральных слагаемых еще одним способом:  $N = (a_1 - 1) + a_2 + \dots + (a_{20} + 1)$ . Таким образом,  $a_1 = 1$ . Далее, если предположить, что  $a_2 > 2$ , то для  $N$  опять можно привести другое разбиение:  $N = a_1 + (a_2 - 1) + a_3 + \dots + (a_{20} + 1)$ . Значит,  $a_2 = 2$ . Продолжая так далее, получаем  $a_3 = 3$ ,  $a_4 = 4$ , ...,  $a_{19} = 19$ . Если  $a_{20} > 21$ , то  $a_{19} + 1 < a_{20} - 1$ , и снова можно сконструировать другое разбиение.

Наконец, нетрудно видеть, что при  $a_{20} = 20$  или  $a_{20} = 21$  получающиеся числа 210 и 211 являются удачными.

7. Ничья 50:50.

Пусть дополнительно шахматисты из одной команды сыграют друг с другом по одной партии, чтобы получился полный круговой турнир. Заметим, что в дополнительных партиях команды дополнительно получили поровну побед, поэтому достаточно доказать, что в круговом турнире команды набрали одинаковое количество побед. Но это действительно так: игрок с рейтингом  $r$  в круговом турнире одержит ровно  $r - 1$  победу, значит, количество побед команды из 10 шахматистов равно суммарному рейтингу шахматистов этой команды, уменьшенному на 10.

8. Как ни странно, ответ можно дать, вообще не решая ребуса. Обозначим искомую цифру буквой  $Z$ , имея в виду, что  $Z \neq 5$ . Ясно также, что  $Z \neq 0$  и  $Z \neq 1$ . Поэтому  $Z$  может принимать значения 2, 3, 4, 6, 7, 8 или 9, а ребус выглядит теперь так:

$$\text{ШЕПНУЛ} \times Z = \text{КРИКНУЛ}$$

Вычтем из обеих частей число ШЕПНУЛ. Получится следующее:

$$\text{ШЕПНУЛ} \times (Z - 1) = \text{КРИКНУЛ} - \text{ШЕПНУЛ}$$

Заметим, что в правой части уменьшаемое и вычитаемое оканчиваются *тремя одинаковыми цифрами*. Поэтому при вычитании полученная разность будет оканчиваться *тремя нулями* и, следовательно, делиться на 1000. Итак, произведение  $\text{ШЕПНУЛ} \times (Z - 1)$  делится на 1000. При каждом конкретном допустимом  $Z$  возникают определенные требования к делимости числа ШЕПНУЛ, которые сведем в таблицу. Обратим внимание, что для всех значений  $Z$ , кроме последнего (т.е.  $Z = 9$ ), число ШЕПНУЛ должно делиться на 100 и, следовательно, оканчиваться двумя нулями. Но это недопустимо, так как последние две цифры числа ШЕПНУЛ различны. Поэтому остается единственная возможность:  $Z = 9$ . Это и есть ответ.

*Дополнение.* В принципе, дальше можно и не решать, по-

$Z$	$Z - 1$	Число, на которое обязано делиться число ШЕПНУЛ
2	1	1000
3	2	500
4	3	1000
6	5	200
7	6	500
8	7	1000
9	8	125

сколько решающий не обязан проверять корректность условия. Тем не менее, в качестве упражнения попробуйте доказать, что при  $Z = 9$  ребус действительно имеет единственное решение:

$$408125 \times 9 = 3673125.$$

9. Отрезок  $BF$  при повороте против часовой стрелки на  $90^\circ$  вокруг центра квадрата (точки  $O$ ) перейдет в  $AE$  (рис.4). Значит,  $BF \perp AE$ . Отрезок  $ED$  при повороте по часовой

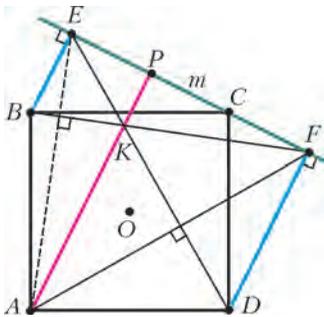


Рис. 4

стрелке вокруг центра квадрата перейдет в  $AF$ . Значит,  $AF \perp DE$ . Поэтому  $K$  – точка пересечения высот треугольника  $AEF$ , т.е.  $AK \perp m$ .

10. а) Рассмотрим шахматную раскраску доски.

Сделаем выстрелы в 32 белые клетки так, чтобы 18 непростреленных белых клеток можно было разделить на 9 пар клеток, имеющих общую вершину (это нетрудно сделать).

Предположим, что мы не попали ни в один из кораблей эскадры. Тогда каждый корабль  $1 \times 2$  содержит белую непростреленную клетку, значит, для каких-то двух кораблей это будут две клетки из одной пары, что невозможно.

б) Сделаем выстрелы в 30 клеток, отмеченных звездочкой на рисунке 5, и предположим, что мы не ранили ни одного корабля из эскадры. Тогда среди красных, зеленых и желтых клеток хотя бы 10 накрыты кораблями, назовем такие клетки *занятыми*.

Среди красных клеток занятых не более трех (в каждой из трех пар клеток, имеющих общую вершину, не более одной

10		*	*	*	*	*	*	*	*	*	*
9		*	*	*	*	*	*	*	*	*	*
8		*	*	*	*	*	*	*	*	*	*
7		*	*	*	*	*	*	*	*	*	*
6		*	*	*	*	*	*	*	*	*	*
5		*	*	*	*	*	*	*	*	*	*
4	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*
3	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*
2	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*
1	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*
	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	

Рис. 5

занятой клетки), среди желтых клеток занятых не более пяти (желтые клетки можно разбить на 5 пар клеток, имеющих общую вершину). Среди зеленых клеток занятых не более двух: действительно, если занята клетка b9, то клетки a8, a10, c10 свободны; если же клетка b9 не занята, то все 3 клетки a8, a10, c10 не могут быть заняты, так как корабль, покрывающий a10, граничит хотя бы с одной из клеток a8, c10. Из сказанного ясно, что среди красных, желтых и зеленых клеток не более 10 занятых, а значит (из предположения), их ровно 10. При этом среди желтых клеток будет ровно 5 занятых; рассматривая «цикл» b5-a6-b7-c8-d9-e10-f9-e8-d7-c6-b5, понимаем, что это возможно, только если заняты b5, b7, d9, f9, d7 либо a6, c8, e10, e8, c6. Среди зеленых клеток заняты ровно 2, причем занята хотя бы одна из клеток a8, c10.

Пусть для определенности занята клетка a8. При этом корабль, покрывающий a8, не может покрывать ни a7 (одна из клеток a6, b7 занята), ни b8 (одна из клеток b7, c8 занята), т.е. этот корабль покрывает a8 и a9. Значит, a10, b10 и b9 не заняты, поэтому занята клетка c10, вместе с одной из клеток c9, d10. Но оба случая противоречивы, так как занята одна из клеток c8, d9, а также занята одна из клеток d9, e10.

### О МОМЕНТАХ ИНЕРЦИИ

$$1. I_{\text{кв}} = \frac{ma^2}{3}; I_{\text{шест}} = \frac{5ma^2}{6}.$$

$$2. I = \frac{5ma^2}{24}. \quad 3. I = \frac{\sqrt{3}ma^2}{4}.$$

4. Для оси, «протыкающей» ребра длиной  $a$ , момент инерции равен  $I = ma^2$ . Для остальных осей – аналогично.

### РЕГИОНАЛЬНЫЙ ЭТАП XLII ВСЕРОССИЙСКОЙ ОЛИМПИАДЫ ШКОЛЬНИКОВ ПО МАТЕМАТИКЕ

9 класс

1. Только 0.

Пусть  $i$ -й трехчлен имеет вид  $f_i(x) = ax^2 + bx + c_i$ . Тогда  $f_2(x_1) = ax_1^2 + bx_1 + c_2 = (ax_1^2 + bx_1 + c_1) + (c_2 - c_1) = c_2 - c_1$ , поскольку  $f_1(x_1) = 0$ . Аналогично получаем равенства  $f_3(x_2) = c_3 - c_2, \dots, f_{100}(x_{99}) = c_{100} - c_{99}$  и  $f_1(x_{100}) = c_1 - c_{100}$ . Складывая все это равенства, находим

$$f_2(x_1) + f_3(x_2) + \dots + f_1(x_{100}) = (c_2 - c_1) + \dots + (c_1 - c_{100}) = 0.$$

Значит, единственное возможное значение суммы – ноль.

2. Так как  $CC'$  – диаметр  $\Omega$ , имеем  $\angle C'AC = 90^\circ$ . Поскольку  $MP \parallel BC$ , получаем  $\angle MPA = \angle BCA = \angle BAC$  (рис.6). Значит, треугольник  $AMP$  – равнобедренный, и поэтому его высота  $MD$  является и медианой. Так как  $AD = DP$  и  $AC' \parallel DM$ , по теореме Фалеса получаем, что  $C'M = MP$ .

3. Нет, не может.

Предположим противное. Рассмотрим степени двойки, на которые делятся выписанные числа; пусть  $2^k$  – наибольшая из них. Если хотя бы два выписанных числа делятся на  $2^k$ , то два соседних таких числа будут различаться на  $2^k$ . Значит, одно из них будет делиться на  $2^{k+1}$ , что невозможно в силу выбора  $k$ . Зна-

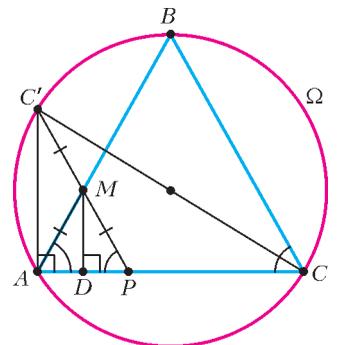


Рис. 6

чит, среди выписанных чисел ровно одно делится на  $2^k$ .  
 Наименьшее общее кратное (НОК) группы, содержащей это число, будет делиться на  $2^k$ , а НОК оставшейся группы – не будет. Значит, сумма этих НОК не делится на  $2^k$ ; с другой стороны, эта сумма больше чем  $2^k$ . Поэтому эта сумма не может быть степенью двойки.

**4. За 2 загрузки.**

Покажем, что Архимеду достаточно использовать мешок дважды. Пусть он сначала положит в мешок слитки с массами 1, 2, 3 и 5 кг, а потом – слитки с массами 1, 4 и 6 кг. В обоих случаях мешок не порвется.

Докажем, что это могло произойти только в том случае, если дважды был использован слиток массой 1 кг. Действительно, если бы Архимед в эти два раза вместо слитков с массами 1, ..., 6 кг использовал слитки с массами  $w_1, \dots, w_6$  кг соответственно, то эти массы удовлетворяли бы системе неравенств  $w_1 + w_2 + w_3 + w_5 \leq 11$ ,  $w_1 + w_4 + w_6 \leq 11$ . Складывая эти неравенства, получаем  $w_1 + (w_1 + w_2 + \dots + w_6) \leq 22$ . В скобках стоит сумма шести различных натуральных чисел, т.е. она не меньше  $1 + 2 + \dots + 6 = 21$ . Отсюда следует, что  $w_1 \leq 22 - 21 = 1$ . Значит,  $w_1 = 1$ , т.е. слиток массой 1 кг однозначно определен.

Осталось показать, что одной загрузки недостаточно. Если Архимед загрузит один слиток, то мешок не порвется в любом случае, т.е. никакой слиток идентифицировать не удастся. Пусть Архимед загрузит больше одного слитка, и мешок не порвется. Если слиток в 1 кг не загружен в мешок, то при замене им любого слитка из мешка результат не изменится; значит, в этом случае Гиерон даже не сможет понять, находится ли этот слиток в мешке. Если же искомым слиток в мешке, то Гиерон не сможет понять, какой из (хотя бы двух) загруженных слитков – требуемый.

**5. Да, могло.**

Предъявим пример, как такое могло произойти.

Выстроим учеников по кругу. Предположим, что к каждому на день рождения пришли все одноклассники, кроме следующего за ним по часовой стрелке. Тогда любые два ученика  $A$  и  $B$  встретились на всех празднованиях, кроме двух: того, на которое не пришел  $A$ , и того, на которое не пришел  $B$ . Значит, любая пара учеников встретилась 21 раз.

**6. Множество всех натуральных чисел, а также множества  $\{1\}$ ,  $\{1, 2\}$ ,  $\{1, 2, 3\}$  и  $\{1, 2, 3, 4\}$ .**

Для начала проверим, что множества  $\{1\}$ ,  $\{1, 2\}$ ,  $\{1, 2, 3\}$ ,  $\{1, 2, 3, 4\}$ , а также множество всех натуральных чисел – полные. Для последнего множества это очевидно; для первых четырех заметим, что если натуральные числа  $a$  и  $b$  таковы, что  $a + b \leq 4$ , то либо они оба равны 2, либо одно из них равно 1; в любом из этих случаев имеем  $ab \leq a + b$ . Значит, если  $a + b \in A$ , то и  $ab \in A$ .

Пусть теперь  $A$  – произвольное полное множество. Если  $A$  содержит некоторое число  $k \geq 2$ , то по условию оно также содержит число  $1 \cdot (k - 1) = k - 1$ . Продолжая этот процесс, получаем, что все натуральные числа, не превосходящие  $k$ , лежат в  $A$ . В частности, если  $A$  не содержит чисел, больших 4, то множество  $A$  уже перечислено в ответе.

Пусть теперь в  $A$  есть число  $l \geq 5$ . Зададим последовательность  $l_1, l_2, \dots$  соотношениями  $l_1 = l$ ,  $l_{n+1} = 2(l_n - 2)$ . Все эти числа лежат в  $A$ . Действительно,  $l_1$  лежит в  $A$  по нашему предположению, а если  $l_n = 2 + (l_n - 2) \in A$ , то и  $l_{n+1} = 2(l_n - 2) \in A$ . Кроме того,  $l_{n+1} = l_n + (l_n - 4)$ ; по индукции теперь получаем, что  $l_{n+1} > l_n \geq 5$ . Значит, для любого натурального  $n$  имеем  $l_n > n$ ; из рассуждений предыдущего абзаца понимаем теперь, что и  $n \in A$ . Итак, все натуральные числа лежат в  $A$ .

**7. 1008 чисел.**

Рассмотрим произвольное окрашивание таблицы. Пусть на-

шлось хотя бы два удачных числа и  $a$  – наименьшее из них, а  $b$  – наибольшее.

Поделим  $b$  на  $a$  с остатком:  $b = qa + r$ , где  $0 \leq r < a$ . Предположим, что  $q \geq 2$ . В произвольном квадрате  $b \times b$  можно расположить  $q^2$  непересекающихся квадратов  $a \times a$ . В этих квадратах будет ровно  $q^2 a$  черных клеток. Однако  $q^2 a > (q+1)a > qa + r = b$ ; значит, в квадрате  $b \times b$  будет больше, чем  $b$  черных клеток, что невозможно. Итак,  $q < 2$ , т.е.  $b < 2a$ .

Общее количество удачных чисел не превосходит количества натуральных чисел от  $a$  до  $b$ , т.е. оно не больше  $b - a + 1 < b - b/2 + 1 = b/2 + 1 \leq 1009$ . Значит, это количество не больше 1008.

Осталось привести пример раскраски, для которой найдутся 1008 удачных чисел. Окрасим черным все клетки 1008-й строки и только их. Рассмотрим произвольный квадрат со стороной  $d \geq 1009$ . Он пересекается с 1008-й строкой, значит, в нем есть целая строка отмеченных клеток, т.е. их как раз  $d$  штук. Значит, все числа от 1009 до 2016 являются удачными, и таких чисел как раз 1008.

**8.** На продолжении отрезка  $AB$  за точку  $A$  отметим точку  $K$  так, что  $AB = AK$  (рис.7). Тогда  $AM$  – средняя линия в треугольнике  $BCK$ , откуда  $AM \parallel CK$ . Значит,  $\angle BKC = \angle BAM = \angle ADC$ . Отсюда следует, что четырехугольник  $AKDC$  вписан.

Опять же используя параллельность  $AM$  и  $CK$ , получаем  $\angle CAM = \angle ACK = \angle ADK$ . Наконец,  $DA$  – медиана и высота в треугольнике  $BDK$ , поэтому  $DA$  является и биссектрисой; отсюда  $\angle ADB = \angle ADK = \angle CAM$ , что и требовалось доказать.

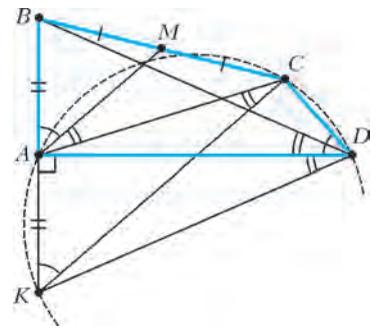


Рис. 7

10 класс

**2. Нет, не может.**

Предположим противное. Заметим, что число, оканчивающееся на 2016, обязательно делится на 16.

Среди десяти Пегиных чисел есть либо одно, либо два числа, делящихся на 8. В первом случае одно из полученных наименьших общих кратных (НОК) делится на 8, а второе – нет, и потому их сумма не делится даже на 8. Во втором же случае разность двух Пегиных чисел, делящихся на 8, равна 8, поэтому одно из них делится на 16, а другое – нет. Следовательно, одно из НОК делится на 16, а другое – нет. Значит, и в этом случае сумма НОК делиться на 16 не может.

**3. В случае  $AB \parallel CD$  имеем  $BC = KN$ , поэтому  $AK = BL = CM = DN$ . Значит, четырехугольник  $LMDA$  получается из  $BCNK$  параллельным переносом на вектор  $\overline{BL}$ .**

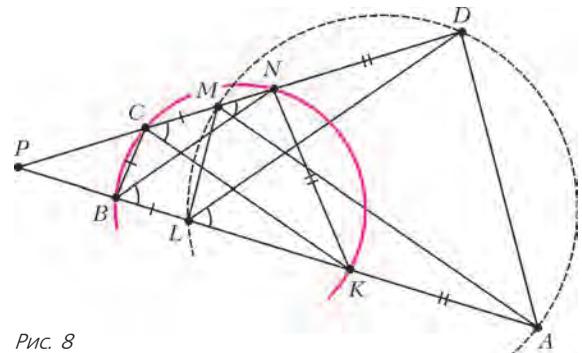


Рис. 8

Пусть теперь  $AB$  и  $CD$  не параллельны; обозначим через  $P$  точку пересечения прямых  $AB$  и  $CD$ . Так как четырехугольник  $BCNK$  вписан, треугольники  $PBC$  и  $PNK$  подобны; отсюда  $\frac{PB}{BL} = \frac{PB}{BC} = \frac{PN}{NK} = \frac{PN}{ND}$ . Значит,  $BN \parallel LD$  (рис.8). Аналогично,  $CK \parallel MA$ . Отсюда получаем  $\angle ALD = \angle KBN$  и  $\angle KCN = \angle AMD$ . Так как четырехугольник  $BCNK$  вписан, то  $\angle KBN = \angle KCN$ . Поэтому и  $\angle ALD = \angle AMD$ , т.е.  $ADML$  также вписан.

4.  $6 \cdot 50^2 - 5 \cdot 50 + 1 = 14751$  пар.

Обозначим длину стороны таблицы через  $2n = 100$  (так что  $n = 50$ ) и пронумеруем строки сверху вниз, а столбцы – слева направо числами от 1 до  $2n$ .

В каждой строке может быть от 0 до  $2n$  черных клеток. Так как количества черных клеток во всех строках различны, эти количества – все числа от 0 до  $2n$ , кроме одного (скажем, кроме  $k$ ). Тогда общее число черных клеток равно  $(0 + 1 + \dots + 2n) - k = 2n^2 + n - k$ . С другой стороны, так как во всех столбцах клеток поровну, общее число черных клеток должно делиться на  $2n$ . Значит,  $k = n$  и во всех столбцах по  $2n^2/(2n) = n$  черных клеток.

Оценим теперь сверху количество пар соседних по стороне разноцветных клеток, считая отдельно пары клеток, соседних по горизонтали и по вертикали.

Если в строке  $i \leq n - 1$  черных клеток, то они могут участвовать не более чем в  $2i$  горизонтальных парах. Если в строке  $i \geq n + 1$  черных клеток, аналогичное рассуждение можно применить к белым клеткам, коих  $2n - i \leq n - 1$ . Итого, горизонтальных разноцветных пар не больше чем

$$2 \cdot (2 \cdot 0 + 2 \cdot 1 + \dots + 2 \cdot (n - 1)) = 2n(n - 1).$$

Оценим теперь количество вертикальных пар. Рассмотрим любую строку с четным номером от 2 до  $2(n - 1)$ ; пусть в ней  $i$  черных клеток. Тогда либо в строке сверху, либо в строке снизу от нее число черных клеток не равно  $100 - i$ ; значит, одна из вертикальных пар, в которых участвуют клетки нашей строки, будет одноцветной. Итого, есть хотя бы  $n - 1$  одноцветных вертикальных пар. Так как общее число вертикальных пар равно  $2n(2n - 1)$ , то разноцветных из них – не больше чем  $2n(2n - 1) - (n - 1)$ . Итого, общее число разноцветных пар не больше чем

$$2n(n - 1) + (4n^2 - 3n + 1) = 6n^2 - 5n + 1 = 14751.$$

Осталось привести пример, в котором указанное число пар достигается. Проведем в нашей таблице  $2n \times 2n$  диагональ из верхнего левого угла в нижний правый. Все клетки, лежащие на диагонали или ниже, покрасим в черный цвет, если они

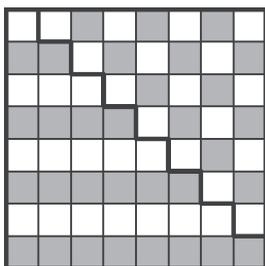


Рис. 9

лежат в четных строках, и в белый – иначе (раскраска «по строкам»). Все клетки, лежащие выше диагонали, покрасим в черный цвет, если сумма номеров их строки и столбца четна, и в белый – иначе («шахматная» раскраска). Пример такой раскраски при  $n = 4$  показан на рисунке 9. Нетрудно проверить, что в каждом столбце ровно по  $n$  черных клеток, в  $(2i - 1)$ -й строке  $n - i$  черных клеток. Кроме того, все оценки выше достигаются.

5. Такое множество одно: это множество  $\mathbb{R}$  всех действительных чисел.

Пусть  $A$  – полное множество. Поскольку оно непусто, то можно выбрать элемент  $a \in A$ . Тогда  $a + 0 = a \in A$ , значит,

$a \cdot 0 = 0 \in A$ . Так как  $(-x) + x = 0 \in A$ , получаем теперь, что  $(-x) \cdot x = -x^2 \in A$  при всех действительных  $x$ . В силу произвольности выбора  $x$  отсюда следует, что любое отрицательное число также принадлежит множеству  $A$ .

Наконец, для любого  $b > 0$  из того что число  $(-b) + (-b) = -2b$  лежит в  $A$  получаем, что  $b^2 = (-b) \cdot (-b) \in A$ . Значит, и произвольное положительное число также лежит в  $A$ . Итак, в  $A$  входят все действительные числа.

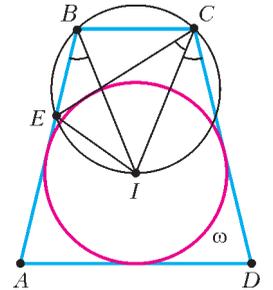


Рис. 10

6. Заметим, что  $I$  лежит на оси симметрии трапеции, поэтому  $\angle ICD = \angle IBA$  (рис.10). Пользуясь вписанностью четырехугольника  $CBEI$ , получаем  $\angle ICD = \angle IBA = \angle IBE = \angle ICE$ . Так как прямая  $CD$  касается окружности  $\omega$ , то и прямая  $CE$ , симметричная ей относительно  $CI$ , также касается  $\omega$ .

8.  $(x, y) = (2, 0)$  и  $(x, y) = (0, 2)$ .

Для удобства сделаем замену  $x = 2a$  и  $y = 2b$ . Тогда из условия имеем  $(2a)^{100} - (2b)^{100} = 2^{99} \cdot (2a - 2b)$  и  $(2a)^{200} - (2b)^{200} = 2^{199} \cdot (2a - 2b)$ . Сократив оба равенства на степени двойки, получаем  $a^{100} - b^{100} = a^{200} - b^{200} = a - b \neq 0$ . Поделив второе выражение на первое, получаем  $a^{100} + b^{100} = 1$ ; значит, каждое из чисел  $a$  и  $b$  по модулю не превосходит 1.

Если  $b = 0$ , то  $a^{100} = a$ , откуда  $a = 1$ . Аналогично, если  $a = 0$ , то  $b = 1$ ; это приводит к двум ответам  $(x, y) = (2, 0)$  и  $(x, y) = (0, 2)$ .

Пусть теперь  $ab \neq 0$ ; тогда  $|a|, |b| < 1$ . Заметим, что значения функции  $f(x) = x^{100} - x = x(x^{99} - 1)$  положительны при  $x \in (-1, 0)$  и отрицательны при  $x \in (0, 1)$ . Поскольку  $a^{100} - b^{100} = a - b$ , имеем  $f(a) = f(b)$ , поэтому числа  $a$  и  $b$  имеют одинаковый знак.

С другой стороны,

$$1 = \frac{a^{100} - b^{100}}{a - b} = a^{99} + a^{98}b + a^{97}b^2 + \dots + b^{99}.$$

Если  $a$  и  $b$  отрицательны, то правая часть также отрицательна, что невозможно. Если же  $a$  и  $b$  положительны, то все слагаемые в правой части положительны, поэтому она больше  $a^{99} + b^{99}$ ; итак,  $a^{99} + b^{99} < 1$ . С другой стороны, поскольку  $0 < |a|, |b| < 1$ , имеем  $a^{99} + b^{99} > a^{100} + b^{100} = 1$ . Противоречие.

11 класс

1. Нет, не может.

Так как трехчлен  $f(x)$  не имеет корней, то  $c = f(0) \neq 0$  и  $f(c) \neq 0$ . Тогда выражение  $\frac{f(c)}{c}$  иррационально как отношение рационального и иррационального чисел. Но

$\frac{f(c)}{c} = \frac{ac^2 + bc + c}{c} = ac + b + 1$ . Так как  $b + 1$  рационально, то  $ac$  – иррационально. Получаем, что дискриминант  $D = b^2 - 4ac$  иррационален как разность рационального и иррационального чисел.

2. По неравенству о средних имеем

$$xy + xz \geq 2\sqrt{xy \cdot xz}, \quad xy + yz \geq 2\sqrt{xy \cdot yz}, \quad xz + yz \geq 2\sqrt{xz \cdot yz}.$$

Сложим эти три неравенства и разделим полученное на 2. С учетом условия, получаем

$$xyz \geq xy + xz + yz \geq x\sqrt{yz} + y\sqrt{xz} + z\sqrt{xy}.$$

Деля полученное неравенство на  $\sqrt{xyz}$ , получаем требуемое.

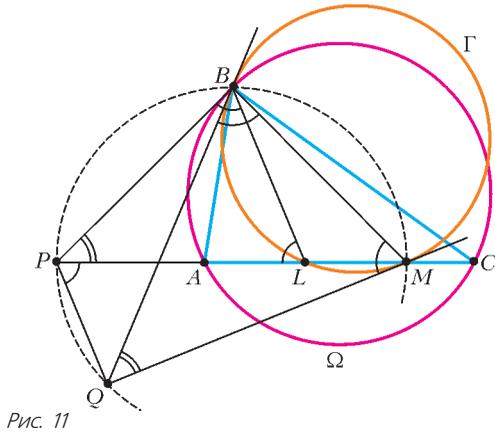


Рис. 11

3. Так как  $BL$  – биссектриса  $\angle ABC$ , имеем  $\angle ABL = \angle LBC$ . Поскольку  $PB$  – касательная к  $\Omega$ , имеем  $\angle PBA = \angle BCA$  (рис.11). Кроме того,

$$\angle PBL = \angle PBA + \angle ABL = \angle BCA + \angle LBC = \angle BLP,$$

значит,

$$\angle BPM = 180^\circ - (\angle PBL + \angle BLP) = 180^\circ - 2\angle BLP.$$

Отсюда следует, в частности, что  $\angle BLP$  – острый.

Так как  $\angle BLM = 180^\circ - \angle BLP$  тупой, касательные к  $\Gamma$  в точках  $B$  и  $M$  пересекаются в точке  $Q$ , лежащей по ту же сторону от  $BM$ , что и точка  $L$  (а значит – по ту же сторону, что и  $P$ ). Далее, имеем

$$\angle QBM = \angle QMB = 180^\circ - \angle BLM = \angle BLP.$$

Значит,

$$\angle BQM = 180^\circ - 2\angle QBM = 180^\circ - 2\angle PBL = \angle BPM.$$

Поэтому точки  $B, M, P$  и  $Q$  лежат на одной окружности. Отсюда следует, что  $\angle QPM = \angle QBM = \angle BLP$ . Это и означает, что  $PQ \parallel BL$ .

4.  $k = 2(2015 - 1500) = 1030$ .

Покажем, что 1030 детекторов Диме хватит. Пусть он расположит 515 детекторов в 515 левых клетках средней строки квадрата, а остальные 515 детекторов – в 515 верхних клетках среднего столбца. Заметим, что при любом положении корабля его левый столбец лежит в одном из 516 левых столбцов доски. Если этот столбец – один из 515 самых левых, то корабль накроет детектор из этого столбца, лежащий в средней строке, иначе ни одного детектора из этой строки корабль не накроет. Значит, по показаниям детекторов из этой строки восстанавливается, в каких столбцах лежит корабль. Аналогично, строки, в которых он находится, восстанавливаются по показаниям детекторов из среднего столбца.

Рассмотрим теперь произвольную расстановку  $k$  детекторов, удовлетворяющих требованиям. Рассмотрим два положения корабля, отличающихся горизонтальным сдвигом на 1. Показания какого-то детектора для них будут различаться, только если этот детектор лежит в самом левом столбце левого корабля или в самом правом столбце правого. Значит, в любых двух вертикальных прямоугольниках  $1500 \times 1$ , отличающихся горизонтальным сдвигом на 1500, есть хотя бы один детектор. Аналогично, в любых двух горизонтальных прямоугольниках  $1 \times 1500$ , отличающихся вертикальным сдвигом на 1500, есть хотя бы один детектор. Назовем такие пары прямоугольников *вертикальными* и *горизонтальными* соответственно.

Выделим все вертикальные пары, лежащие в нижних 1500 и в верхних 1500 строках доски; таких пар  $2 \cdot 515 = 1030$ . Аналогично, выделим все 1030 горизонтальных пар, лежащих в левых 1500 и в правых 1500 столбцах. Разобьем доску на 9 прямоугольных областей так, как показано на рисунке 12.

Выделенные пары не покрывают клеток из  $E$ ; каждая же клетка в остальных областях покрыта двумя выделенными парами (в  $D$  и  $F$  – двумя вертикальными, в  $B$  и  $H$  – двумя горизонтальными, а в областях  $A, C, G$  и  $I$  – одной горизонтальной и одной вертикальной). Итак, каждый детектор лежит не более чем в двух выделенных парах; значит, чтобы в каждой выделенной паре был хотя бы один детектор, требуется не менее  $2 \cdot 1030/2 = 1030$  детекторов.

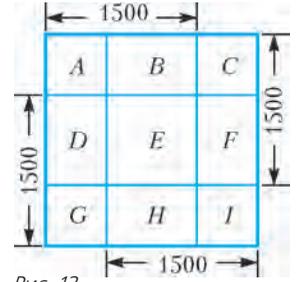


Рис. 12

6.  $1008^2 = 1016064$  точек.

Пусть среди сфер есть  $r$  красных и  $2016 - r$  зеленых. Так как у любых двух сфер максимум одна точка касания, количество синих точек не превосходит

$$r(2016 - r) = 1008^2 - (1008 - r)^2 \leq 1008^2.$$

Предъявим пример с таким количеством синих точек. Пусть  $l$  – некоторая прямая,  $\alpha$  – плоскость, перпендикулярная  $l$  и пересекающая ее в точке  $O$ , а  $\omega$  – окружность с центром  $O$  и радиусом 1, лежащая в  $\alpha$  (рис.13). Построим 1008 красных

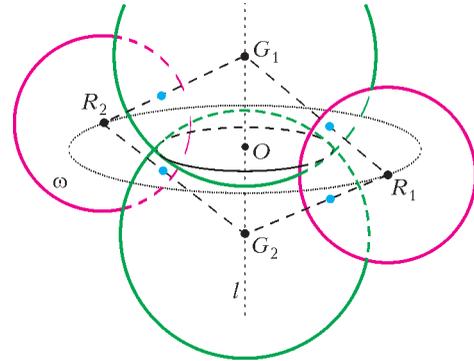


Рис. 13

сфер одинакового радиуса  $r < 1$  с различными центрами  $R_1, R_2, \dots, R_{1008}$ , лежащими на  $\omega$ .

Пусть  $G_1, G_2, \dots, G_{1008}$  – различные точки на  $l$ , удаленные от  $O$  на расстояния  $d_1, d_2, \dots, d_{1008}$ . Тогда расстояние между  $G_i$  и любой точкой  $R_j$  равно  $\sqrt{1 + d_i^2}$ . Значит, если мы построим зеленую сферу с центром  $G_i$  и радиусом  $\sqrt{1 + d_i^2} - r$ , она будет касаться всех синих сфер. При этом все точки касания будут попарно различными, поскольку они лежат на отрезках вида  $R_j G_i$ , которые не имеют общих точек, кроме концов. Значит, в нашей конструкции действительно будут отмечены  $1008^2$  синих точек.

8. Нет, не обязательно.

Приведем пример числа  $N$ , для которого все указанные числа будут различными. Положим

$$N = (3^2 - 2^2)^{105} (3^3 - 2^3)^{70} (3^5 - 2^5)^{126} (3^7 - 2^7)^{120}.$$

Тогда

$$N = M_2^2 (3^2 - 2^2) = M_3^3 (3^3 - 2^3) = M_5^5 (3^5 - 2^5) = M_7^7 (3^7 - 2^7)$$

при некоторых натуральных  $M_2, M_3, M_5$  и  $M_7$ , не делящихся ни на 2, ни на 3. Отсюда

$$\begin{aligned} N &= (3M_2)^2 - (2M_2)^2 = (3M_3)^3 - (2M_3)^3 = \\ &= (3M_5)^5 - (2M_5)^5 = (3M_7)^7 - (2M_7)^7. \end{aligned}$$

Даже все восемь чисел, участвующих в представлениях, различны, поскольку у любых двух из них разная степень вхождения либо двойки, либо тройки.

## РЕГИОНАЛЬНЫЙ ЭТАП XLX ВСЕРОССИЙСКОЙ ОЛИМПИАДЫ ШКОЛЬНИКОВ ПО ФИЗИКЕ

### ТЕОРЕТИЧЕСКИЙ ТУР

9 класс

1. Чтобы путь, пройденный за время  $\tau$ , был минимальным, автомобиль должен сначала тормозиться, до полной остановки, а затем разогнаться в обратном направлении. Пройденный путь равен

$$s = \frac{v_0 t_1}{2} + \frac{v_0 (\tau - t_1)^2}{2} = \frac{v_0}{2} \left( t_1 + \frac{(\tau - t_1)^2}{t_1} \right).$$

Преобразуем это выражение к виду

$$\frac{2st_1}{v_0} = t_1^2 + (\tau - t_1)^2, \text{ или } t_1^2 - \left( \tau + \frac{s}{v_0} \right) t_1 + \frac{\tau^2}{2} = 0.$$

Дискриминант этого квадратного уравнения относительно  $t_1$  равен

$$\left( \tau + \frac{s}{v_0} \right)^2 - (\sqrt{2}\tau)^2 = \left( \tau + \frac{s}{v_0} - \sqrt{2}\tau \right) \left( \tau + \frac{s}{v_0} + \sqrt{2}\tau \right).$$

Из анализа первого сомножителя находим, что путь, пройденный за время  $\tau$ , минимален при условии

$$s = (\sqrt{2} - 1)\tau v_0.$$

2. Вертикальное перемещение шарика описывается уравнением

$$h = v_b t - \frac{gt^2}{2}, \text{ или } t^2 - 2\frac{v_b}{g}t + \frac{2h}{g} = 0,$$

где  $v_b$  – проекция начальной скорости на вертикальную ось. По теореме Виета,

$$t_1 + t_2 = \frac{2v_b}{g} \text{ и } t_1 t_2 = \frac{2h}{g}.$$

Отсюда находим

$$h = \frac{gt_1 t_2}{2} = 10 \text{ м и } v_b = \frac{g(t_1 + t_2)}{2} = 15 \text{ м/с}.$$

Заметим, что при отражении от стенки вертикальная составляющая скорости шарика не изменяется, поэтому максимальная высота полета определяется лишь начальной вертикальной скоростью  $v_b$  и равна

$$H = \frac{v_b^2}{2g} = \frac{g(t_1 + t_2)^2}{8} = 11,25 \text{ м}.$$

Горизонтальные перемещения шарика и стенки до момента столкновения связаны соотношениями

$$v_1 t_2 = u_1 t_1 \text{ и } v_1 t_1 = u_2 t_2,$$

так как стенка проходит то расстояние, которое «не успевает» пролететь до падения шарик, откуда находим

$$u_1 = v_1 \frac{t_2}{t_1} \text{ и } u_2 = v_1 \frac{t_1}{t_2},$$

где  $v_1$  – проекция начальной скорости на горизонтальную ось. В момент столкновения шарика со стенкой горизонтальная скорость шарика изменяет свое направление на противоположное и увеличивается на удвоенную скорость стенки (это можно показать, рассмотрев упругий отскок в системе отсчета, в которой стенка покоится). Вертикальная скорость шарика при отражении не изменяется, и дальнейший полет до падения длится столько же времени, как и в отсутствие удара. Тогда проекции перемещения шарика до мест падения равны

$$L_1 = v_1 t_1 - (v_1 + 2u_1)t_2 = v_1 \left( t_1 - t_2 - 2\frac{t_2^2}{t_1} \right),$$

$$L_2 = v_1 t_2 - (v_1 + 2u_2)t_1 = v_1 \left( t_2 - t_1 - 2\frac{t_1^2}{t_2} \right).$$

Расстояние между точками падения равно

$$L = L_2 - L_1 = 2v_1 \left( t_2 - t_1 + \frac{t_2^2}{t_1} - \frac{t_1^2}{t_2} \right),$$

откуда получаем

$$v_1 = \frac{L}{2} \left( \frac{t_1 t_2}{(t_1 + t_2)^2 (t_2 - t_1)} \right) = 1 \text{ м/с}.$$

Окончательно,

$$v = \sqrt{v_1^2 + v_b^2} \approx 15 \text{ м/с},$$

$$s = v_1 (t_1 + t_2) = 3 \text{ м},$$

$$u_1 = 2 \text{ м/с и } u_2 = 0,5 \text{ м/с}$$

3. График (рис.14) зависимости  $F_A(h)$  имеет три излома, которые соответствуют изменению площади сечения тела и пол-

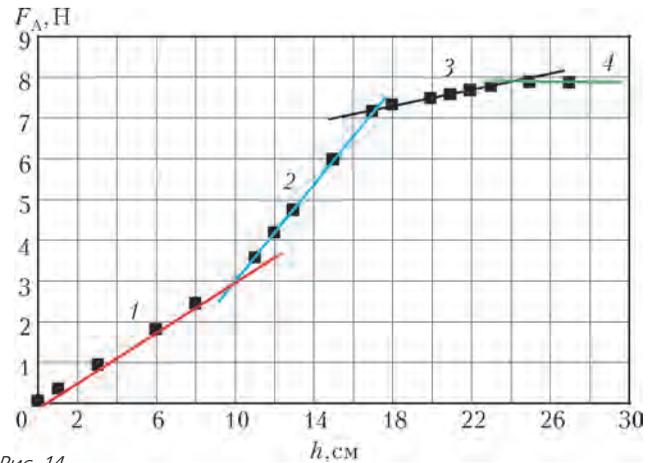


Рис. 14

ному его погружению. Заметим, что положение изломов находится путем экстраполяции линейных зависимостей до их пересечения (в точках 10 см, 17 см и 24 см), поэтому опираться только на табличные данные при определении высот цилиндров нельзя. В области  $h < 24$  см самый пологий участок графика третий, следовательно, на нем наименьшая площадь поперечного сечения  $S = 10 \text{ см}^2$ . Угловой коэффициент наклона первого участка в три раза больше, следовательно, его сечение  $3S = 30 \text{ см}^2$ . На втором участке угловой коэффициент наклона больше в 6 раз, а его площадь сечения  $6S = 60 \text{ см}^2$ . Длины цилиндров 10 см, 7 см и 7 см соответственно. Плотность жидкости можно определить, например, по третьему участку:  $\rho = \frac{\Delta F_A}{Sg\Delta h} = 1000 \text{ кг/м}^3$ .

4. Изобразим эквивалентную схему и расставим токи в ветвях с учетом закона сохранения заряда и закона Ома (рис.15).

Теперь легко дать ответы на вопросы задачи. В силу симметрии схемы, токи в ветвях  $KC$  и  $ML$  не идут. Следовательно, эти резисторы можно убрать, и это не приведет к перераспределению токов в цепи и изменению общего сопротивления, которое равно

$$R_{AB} = \frac{U_{AB}}{I_{AB}} = \frac{2IR}{4I} = \frac{1}{2}R.$$

По условию  $I = 2 \text{ А}$ , следовательно, сила тока, входящего в узел  $A$ , равна  $4I = 8 \text{ А}$ , а сила тока

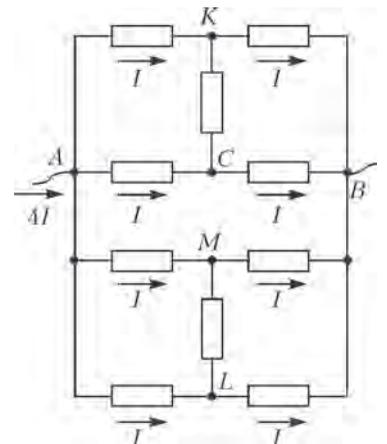


Рис. 15

через идеальную перемычку  $AA'$  равна сумме токов через резисторы в ветвях  $A'K$  и  $A'M$ , т.е. равна  $2I = 4$  А.

5. Запишем уравнение теплового баланса для конденсирующегося (превращающегося в воду) пара, остывающей и кристаллизующейся воды и нагревающегося льда:

$$m_{\text{п}}(L + c(t_{\text{кип}} - t_0) + \lambda) = mc_1(t_0 - t), \text{ откуда } m_{\text{п}} = \frac{-mtc_1}{L + ct_{\text{кип}} + \lambda}$$

(здесь и далее учтено, что  $t < 0$ ). Максимальная масса пара потребуется при максимальном по модулю значении произведения  $mt$ . Одинаковым значениям этого произведения соответствуют точки, лежащие на прямых, проведенных из начала координат. Действительно, для этих прямых выполняется условие  $t = \alpha \frac{m_0}{m}$ , или  $mt = \alpha m_0 = \text{const}$ , где  $\alpha$  – угловой ко-

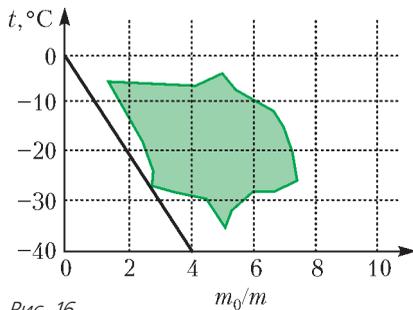


Рис. 16

эффициент наклона прямой. Чем больше угол наклона прямой, тем больше модуль произведения  $mt$ . Из графика (рис. 16) видно, что для прямой, проведенной из начала координат, касающейся области возможных параметров льда и имеющей максимальный угол на-

клона,  $\alpha = -10$  °С, и  $mt = -10$  кг · °С. Отсюда получим  $m_{\text{п max}} \approx 6,9$  г.

Возможно и иное понимание условия. Запишем уравнение теплового баланса для конденсирующегося (превращающегося в воду) пара, остывающей воды и нагревающегося льда:

$$m_{\text{п}}(L + c(t_{\text{кип}} - t_0)) = mc_1(t_0 - t), \text{ откуда } m_{\text{п}} = \frac{-mtc_1}{L + ct_{\text{кип}}}$$

В этом случае  $m_{\text{п max}} \approx 7,7$  г.

Можно считать верными оба ответа, соответствующие границам найденного диапазона.

10 класс

1. При постоянной силе  $F$  мощность равна

$$N = Fv = Fat = \frac{F^2}{m}t,$$

поэтому следует ожидать линейную зависимость  $N(t)$ . Построим график по табличным данным и проведем наилучшую

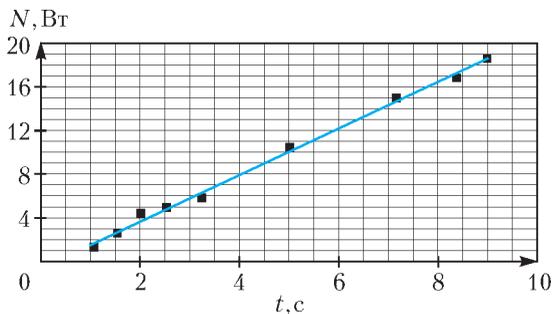


Рис. 17

прямую из начала координат (рис. 17). В момент времени  $\tau = 6$  с мощность должна составлять  $N = 12$  Вт. По угловому коэффициенту наклона графика  $k = F^2/m = 2$  Вт/с определяем значение силы:  $F = \sqrt{km} = 2$  Н.

2. Так как стержень жесткий, проекции скоростей всех точек стержня, а значит и точки  $B$ , на направление вдоль стержня равны  $v \sin \alpha$ , поэтому  $u_{\parallel} = v \sin \alpha$ . Перпендикулярные со-

ставляющие скоростей линейно возрастают с расстоянием от точки  $K$ . Тогда

$$\frac{u_{\perp}}{BK} = \frac{v \cos \alpha}{KA}, \text{ и } u_{\perp} = v \cos \alpha \cdot \frac{2R - 2R \cos \alpha}{2R \cos \alpha} = v(1 - \cos \alpha).$$

Скорость точки  $B$  стержня равна

$$u = \sqrt{u_{\parallel}^2 + u_{\perp}^2} = \sqrt{v^2 \sin^2 \alpha + v^2 (1 - \cos \alpha)^2} = v \sqrt{2(1 - \cos \alpha)} = 2v \sin \frac{\alpha}{2}.$$

3. По условию масса льда в результате теплообмена не изменяется, следовательно, переданное тепло выделяется при остывании воды и идет на нагревание льда (процессы плавления/кристаллизации нет).

Количество теплоты, которое может отдать остывающая вода, равно

$$Q = mc(t - t_0)$$

(поскольку  $t_0 = 0$  °С).

Максимум тепла выделится при максимальном по модулю значении произведения  $mt$ . Одинаковым значениям этого произведения соответствуют точки, лежащие на прямых, проведенных из начала координат (рис. 18). Действительно, для них выполняется условие

$$t = \alpha \frac{m_0}{m}, \text{ или } mt = \alpha m_0 = \text{const},$$

где  $\alpha$  – угловой коэффициент наклона прямой. Чем больше угол наклона прямой, тем больше модуль произведения  $mt$ . Это условие выполняется для прямой 1, проведенной из начала координат и касающейся области возможных параметров воды. Но такое выделенное водой количество теплоты привело бы к плавлению льда. Действительно, удельная теплоемкость льда в два раза меньше удельной теплоемкости воды, поэтому прямой 1 соответствует прямая 2, имеющая в два раза больший угловой коэффициент наклона, но она не касается области возможных параметров льда. Следовательно, максимальное  $Q_{\text{max}}$  будет определяться прямой 3 и соответствующей ей прямой 4, проходящей через область возможных параметров воды, для которой  $mt = 10/6$  кг · °С  $\approx 1,67$  кг · °С. Отсюда находим

$$Q_{\text{max}} = 7,0 \text{ кДж.}$$

Крайние точки пересечения прямой 4 с областью возможных параметров воды определяют диапазон масс добавленной в калориметр воды:

$$\left[ \frac{m_0}{6,2}, \frac{m_0}{3,0} \right], \text{ или } [0,16; 0,33] \text{ кг.}$$

Точка касания прямой 3 области возможных параметров льда позволяет найти массу льда в калориметре:

$$\left[ \frac{m_0}{4,6} \right] = 0,22 \text{ кг.}$$

Отсюда получаем, что возможная масса содержимого лежит в диапазоне  $[0,38; 0,55]$  кг.

4. Изобразите эквивалентную схему и убедитесь в том, что в силу симметрии схемы токи через резисторы в ветвях  $KC'$  и  $CL$  не идут. Следовательно, эти резисторы можно убрать.

Общее сопротивление цепи равно  $R_{AB} = \frac{2IR}{5I} = \frac{2}{5}R$ . Сила тока, входящего в узел  $A$ , равна  $5I = 10$  А. Сила тока через идеальную перемычку  $AA'$  составляет  $3I = 6$  А.

5. Сила трения, действующая на брусок со стороны пола, на-

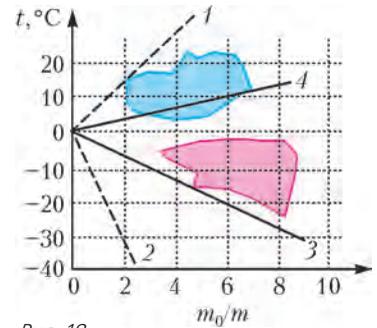


Рис. 18

правлена против скорости бруска и равна  $F_{\text{тр}1} = \mu_1 mg$ , а сила трения со стороны транспортера  $F_{\text{тр}2} \leq \mu_2 N$ , где  $N = F_{\text{тр}1} \cos \alpha$ . С другой стороны,  $F_{\text{тр}2} = F_{\text{тр}1} \sin \alpha$ . Возможны два случая.

1) Между бруском и лентой есть проскальзывание. Тогда  $F_{\text{тр}2} = \mu_2 N = \mu_2 F_{\text{тр}1} \cos \alpha = F_{\text{тр}1} \sin \alpha$ , и  $\text{tg } \alpha = \mu_2$ . Этот случай возможен, когда  $v/u \geq \mu_2$ .

2) Между бруском и лентой нет проскальзывания. В этом случае  $v/u = \text{tg } \alpha$ , при этом  $v/u \leq \mu_2$ . Смещение бруска вдоль ленты транспортера равно  $s \text{tg } \alpha$ . Путь, пройденный бруском, в первом и во втором случаях равен

$$L_1 = \sqrt{s^2 + (s \text{tg } \alpha)^2} = s\sqrt{1 + \text{tg}^2 \alpha} = s\sqrt{1 + \mu_2^2}, \quad L_2 = s\sqrt{1 + \left(\frac{v}{u}\right)^2}.$$

Работа по перемещению бруска в обоих случаях равна  $A = F_{\text{тр}1} L = \mu_1 mg L$ , поэтому

$$A_1 = \mu_1 mgs\sqrt{1 + \mu_2^2}, \quad A_2 = \mu_1 mgs\sqrt{1 + \left(\frac{v}{u}\right)^2}.$$

11 класс

1. Так как мощность равна  $N = Fv$  и работа равна  $A = Fs = mv^2/2$ , то  $N = \sqrt{2F^3 s/m}$  и ожидается линейная зависимость  $N$  от  $\sqrt{s}$ . Постройте график  $N(\sqrt{s})$  по табличным данным и проведите через нанесенные точки наилучшую прямую из начала координат. Тогда получите, что в точке с координатой  $s = 10$  см мощность должна составлять  $N_s = 0,89$  Вт. По угловому коэффициенту наклона графика  $k = \Delta N/\sqrt{\Delta s} = \sqrt{2F^3/m} \approx 2,8$  Вт/м<sup>1/2</sup> определяем значение силы:  $F = \sqrt[3]{k^2 m/2} \approx 2,0$  Н.

2. Из основного уравнения динамики  $v_0^2/r_\gamma = GM_\gamma/r_\gamma^2$  найдем массу ядра галактики:

$$M_\gamma = \frac{r_\gamma v_0^2}{G} = 1,1 \cdot 10^{41} \text{ кг}.$$

Средняя плотность ядра галактики составляет

$$\rho_\gamma = \frac{M_\gamma}{(4/3)\pi r_\gamma^3} = \frac{3v_0^2}{4\pi G r_\gamma^2} = 1,35 \cdot 10^{-20} \text{ кг/м}^3.$$

Вне ядра галактики уравнение движения имеет вид  $v_0^2/r = (G/r^2)(M_\gamma + M_\tau(r))$ , или  $v_0^2 r = G(M_\gamma + M_\tau(r))$ . После дифференцирования этого выражения получим  $v_0^2 dr = G dM_\tau(r) = G \rho_\tau(r) \cdot 4\pi r^2 dr$ . Отсюда найдем плотность «темной материи» в зависимости от расстояния  $r$ :

$$\rho_\tau(r) = \frac{v_0^2}{4\pi G r^2} = \frac{M_\gamma}{4\pi r_\gamma r^2}.$$

Масса темной материи равна  $M_\tau = (15r_\gamma v_0^2/G) - M_\gamma = 14M_\gamma$ , и

$$\frac{M_\tau}{M_\gamma} = 14.$$

3. Общее сопротивление цепи равно  $5/12 R$ ; минимальный ток через резистор равен 0,1 А; максимальный ток через резистор равен 0,5 А; через идеальную перемычку  $AA'$  течет ток 0,7 А. *Указание:* нарисуйте эквивалентную схему и расставьте токи в ветвях с учетом закона сохранения заряда и симметрии соединения резисторов.

4. Количество теплоты, подведенное к газу на участке 1–2, равно  $Q_{12} = \Delta U_{12} + A_{12}$ , а количество теплоты, отведенное на участке 3–4, равно  $|Q_{34}| = \Delta U_{43} + A_{43}$ . Сравним изменения величин внутренних энергий. Пусть давление в точках 1 и 3 равно  $p_0$ , а объем в точках 2 и 4 равен  $V_0$ . Пусть при переходе из состояния 1 в состояние 2 давление изменяется на  $\Delta p$ , а объем – на  $\Delta V$ . Тогда изменение температуры найдем

из следующих соображений:

$$vRT_2 = p_0 V_0 + V_0 \Delta p, \quad vRT_1 = p_0 V_0 - p_0 \Delta V,$$

$$vR(T_2 - T_1) = V_0 \Delta p + p_0 \Delta V.$$

Аналогично найдем изменение температуры при переходе из состояния 3 в состояние 4:

$$vR(T_3 - T_4) = p_0 \Delta V + V_0 \Delta p.$$

Поскольку  $T_3 - T_4 = T_2 - T_1$ , то равны между собой и изменения внутренней энергии:  $\Delta U_{12} = \Delta U_{43}$ . Работа  $A_{12}$  больше работы  $A_{43}$  на величину  $A/2$ . Следовательно,  $Q_{12}$  больше  $|Q_{34}|$  на  $A/2$ .

5. В начальный момент времени ток в цепи не течет, поэтому  $U_L = U_C = \frac{Q_0}{C_0}$ . Поскольку  $U_L = L \frac{dI}{dt}$  остается постоянным (по условию), то  $I = \frac{Q_0}{C_0 L} t$ . По закону Ома для полной цепи,

$$U_C = U_L + RI(t) = L \frac{dI}{dt} + RI(t) = \frac{Q_0}{C_0} + \frac{Q_0 R}{C_0 L} t = \frac{Q_0}{C_0} \left(1 + \frac{R}{L} t\right).$$

Заряд на конденсаторе изменяется по закону

$$Q(t) = Q_0 - \frac{Q_0}{C_0 L} \int_0^t \tau d\tau = Q_0 \left(1 - \frac{t^2}{2C_0 L}\right),$$

а емкость конденсатора – по закону

$$C(t) = \frac{Q(t)}{U(t)} = C_0 \frac{1 - t^2/(2C_0 L)}{1 + Rt/L}.$$

Искомую работу найдем из закона сохранения энергии

$$A = W_R + \Delta W_C + \Delta W_L.$$

Окончательно получим

$$A = \frac{Q_0^2}{3C_0} + 0 + \frac{Q_0^2}{2C_0} = \frac{5Q_0^2}{6C_0}.$$

# КВАНТ

## НОМЕР ПОДГОТОВИЛИ

**С.А.Дориченко, А.А.Егоров, Е.М.Епифанов,  
П.А.Кожевников, А.Ю.Котова, В.А.Тихомирова,  
А.И.Черноуцан**

## НОМЕР ОФОРМИЛИ

**В.В.Власов, Д.Н.Гришукова, А.Е.Пацхверия,  
М.Н.Сумнина**

## ХУДОЖЕСТВЕННЫЙ РЕДАКТОР

**Е.В.Морозова**

## КОМПЬЮТЕРНАЯ ГРУППА

**М.Н.Грицук, Е.А.Митченко**

**Журнал «Квант» зарегистрирован в Комитете РФ  
по печати. Рег. св-во №0110473**

**Тираж: 1-й завод 900 экз. Заказ №**

**Адрес редакции:**

**119296 Москва, Ленинский проспект, 64-А, «Квант»**

**Тел.: (495) 930-56-48**

**E-mail: math@kvant.ras.ru, phys@kvant.ras.ru**

**Отпечатано**

**в соответствии с предоставленными материалами  
в ООО «ИПК Парето-Принт», г.Тверь  
www.Pareto-print.ru**

## ВПЕРЕДИ МАТЧ КАРЯКИН-КАРЛСЕН

В марте в Москве в здании Центрального телеграфа состоялся турнир претендентов на звание чемпиона мира. Восемь супергроссмейстеров в два круга боролись за то, чтобы бросить перчатку шахматному королю Магнусу Карлсену. И победителем турнира стал россиянин Сергей Карякин.

Напомним состав участников турнира (расположены в порядке убывания их рейтинга до старта): Каруана Фабиано (США) – 2794, Гири Аниш (Нидерланды) – 2793, Накамура Хикара (США) – 2790, Аронян Левон (Армения) – 2786, Топалов Веселин (Болгария) – 2780, Ананд Виши (Индия) 2762, Карякин Сергей (Россия) – 2760, Свидлер Петр (Россия) – 2757.

В каждый «рабочий» день на турнире игралось 4 партии, всего состоялось 4 × 14 = 56 партий. Из них результативных оказалось 16, в среднем чуть больше одной партии за тур. Вот итоги турнира: 1. Карякин – 8,5; 2-3. Ананд, Каруана – 7,5; 4-7. Аронян, Гири, Накамура, Свидлер – 7; 8. Топалов – 4,5. Интересно, что только Топалов набрал меньше 50% очков, не выиграл ни одной партии, а проиграл пять. Ни одной победы не одержал и Гири, но у него нет и ни одного поражения.

Приведем две интересные партии Карякина, первая сыграна во 2-м туре, вторая – в последнем.

### Карякин-Накамура

#### Новоиндийская защита

1. d4 ♘f6 2. c4 e6 3. ♘f3 b6 4. g3 ♘a6 5. b3 ♘b4 6. ♘d2 ♘e7 7. ♘g2 d5 8. cd ed 9. 0-0 0-0 10. ♘c3 ♘bd7 11. ♗c2 ♘e8 12. ♘fd1 ♘f8 13. ♘e5 ♘b7 14. ♘c1 ♘e6 15. ♘b2 ♘d6 16. e3 a6 17. ♘e2 c5 18. dc ♘c5 19. ♘d3 ♘ce4 20. ♚ac1 ♚c8 21. ♗b1 ♗e7 22. ♘d4 ♚c1 23. ♚c1 b5 24. b4 ♘d7 25. a3 ♘f8 26. ♘a1 ♘e6 27. ♗a2 ♘c7 28. ♘d4 ♘b6 29. h4. Маневренная борьба протекала при небольшом давлении белых. Их слоны на больших диагоналях довольно симпатичны, а, например, черный на b7 упирается в собственную пешку. Но здесь размен легких фигур – 29... ♘:d4 30. ♘:d4 ♘:d4 31. ed практически вел к уравнению. Однако ход крайней пешки «h» подсказал Накамуре жертву коня на g3 с намерением забрать за него несколько пешек и обнажить неприятельского короля. Но, плохо проверив варианты, он допускает элементарный просчет.

29... ♘:g3?? 30. fg. Уже здесь американец заметил, что натворил.



30... ♘:d4 31. ♘:d4 ♘:d4 32. ed ♗e3+ 33. ♗f2! Черные рассматривали только 33. ♘f2, и тогда действительно пешка падала одна за другой. Но, оказывается, можно отдать коня и... забрать слона. 32... ♗:d3 34. ♚c7! Вот в чем дело, поле c7 только что было прикрыто трижды – конем, слоном и ферзем, и поэтому Накамура не заботился о нем. 34...f5 35. ♚b7 h6 36. ♘:d5+ ♗h7 37. ♘g2 ♚e2 38. ♘f1. Черные сдались.

В 14-м туре предстояла решающая схватка Карякин – Каруана. Оба лидера имели поровну очков, но при ничьей победа в турнире доставалась российскому гроссмейстеру, поскольку к тому моменту у Карякина было три победы, а у Каруаны – две.

### Карякин-Каруана

#### Сицилианская защита

1. e4 c5 2. ♘f3 ♘c6 3. d4 cd 4. ♘:d4 ♘f6 5. ♘c3 d6. Вариант Раузера объективно опасен для черных, но при малейших неточностях белых соперник может перехватить инициативу – то, что надо Каруане в сложившейся ситуации. 6. ♘g5 e6 7. ♗d2 a6 8. 0-0-0 ♘d7 9. f4 h6 10. ♘h4 b5. Не годится 10... ♘:e4? 11. ♗e1 ♘f6 12. ♘f5 ♗c7 13. ♘:f6 gf 14. ♘d5. 11. ♘:f6 gf. Брать ферзем нельзя – 11... ♗:f6? 12. e5 de 13. ♘:b5! 12. f5 ♗b6 13. fe fe 14. ♘:c6 ♗:c6 15. ♘d3 h5 16. ♗b1 b4 17. ♘e2 ♗c5 18. ♘hf1 ♘h6 19. ♗e1 a5! Не давало шансов на выигрыш турнира 19... ♗e7 20. ♗g3 ♚ag8 21. ♗f3 ♚f8 22. ♘:a6, и черные предлагают взять «отравленную пешку»: 20. ♚:f6?! ♘g7 21. ♚f3 ♗e5 22. c3 a4. 20. b3!? Не эффективно 20. ♘f4 ♘:f4 21. ♚:f4 ♗e5. 20... ♘g8! Ладья подключается к игре, чтобы погасить активность белых. Раго 20...a4?! 21. ♘c4! ab 22. ♘:b3, и черным несладко. 21. g3 ♗e7 22. ♘c4 ♘e3! 23. ♚f3 ♚g4. Блестящая игра американца позволила ему стабилизироваться и затеять активные операции. 24. ♗f1 ♚f8 25. ♘f4 ♘:f4! После 25... ♘d4 26. ♗e2 a4 27. ♚fd3 ♘e5 28. ♘:h5 ударную батарею на большой диагонали не разместить, а материала уже не хватает. 26. ♚:f4 a4?! Импульсивное реше-

ние, которое лишь ослабляет пешку b4. Правильно 26... ♘c6 с переводом ладьи на e5. 27. ba ♘:a4 28. ♗d3. Компьютер показал, что осуществленный вскоре белыми прорыв e4-e5 здесь еще опаснее для черных. 28... ♘c6? Лучше сразу 28... ♚g5, и позиция оставалась неясной. 29. ♘b3 ♚g5 30. e5! Жертва пешки ради освобождения ладье четвертой линии. 30... ♚:e5 31. ♚c4 ♚d5 32. ♗e2 ♗b6 33. ♚h4. Белые фигуры взяли под прицел почти все слабые пункты: b4, d6, e6, h5. 33... ♚e5. Игра с огнем! После 33... ♚:d1+ 34. ♗:d1 ♗e3 35. ♚b4 ♘e4 черные возвращали пешку, но сохраняли активные фигуры. 34. ♗d3 ♘g2 35. ♚d4 d5 36. ♗d2. Пешка b4! под боем, но при 36... ♘e4 37. ♚b4 ♗c7 предстояла увлекательная борьба с непредсказуемым концом. Но испытывая недостаток времени, Каруана решил, что его соперник просто зевнул. 36... ♚e4??



37. ♚:d5!! Гром среди ясного неба! Замечательная комбинация, которая ведет к резкой ситуации на доске. Неожиданная жертва ладьи полностью обнажает черного короля. 37...ed 38. ♗:d5 ♗c7. Не годится как 38... ♚d4 39. ♗:d4 ♗:d4 40. ♚:d4, так и 38...f5 39. ♗d7+ ♗f6 40. ♚d6+. 39. ♗f5! Хорошо и 39. ♗:h5 ♚e6 40. ♘e6 ♗:e6 41. ♗e2+ ♗f7 42. ♗g2, но Сергей находит лучший ход, эффектно завершающий турнир. 39... ♚f7. Или 39... ♗c6 40. ♗h7+ ♗e8 41. ♗:h5+ ♗e7 42. ♘d5. 40. ♘:f7 ♗e5 41. ♚d7+ ♗f8 42. ♚d8+. Черные сдались, ввиду неизбежного мата – 42... ♗:f7 43. ♗h7+ ♗e6 44. ♗d7×. Красивый финал!

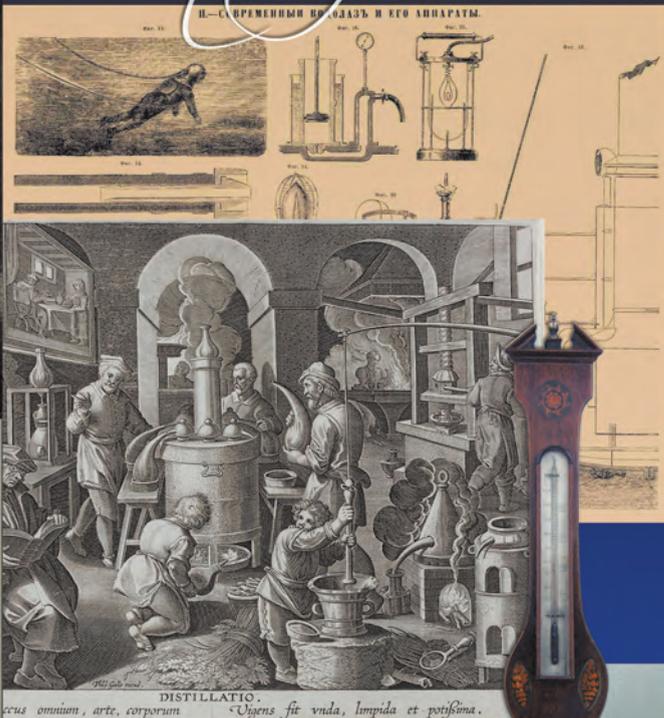
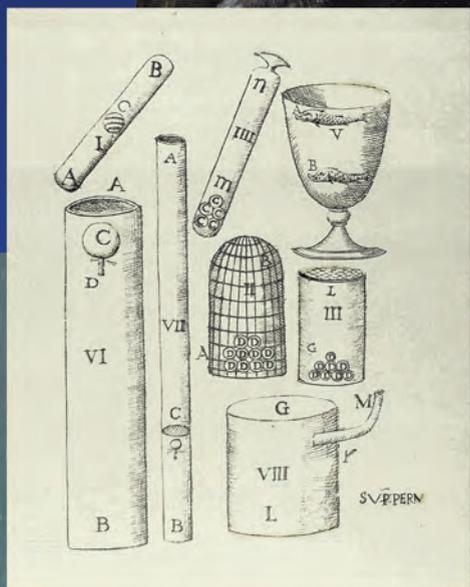
Итак, Карякин – победитель, Каруана – второй (он выиграл личный матч у Ананда), Ананд – третий. Но есть ли у Карякина шансы в битве с норвежцем? В 1992 году Карякин стал самым юным гроссмейстером в истории – в 12 лет! Настоящий вундеркинд. «Так может начинать только будущий чемпион мира!» – говорили о нем поклонники шахмат. Насколько соответствует этот тезис действительности, мы узнаем в ноябре. Ждать осталось недолго.

Е.Гук

# Уроки с физикой



СПАСЕМ ВОДОЛАЗА



«Флакончики Маджотти» - так можно назвать авторский рисунок, приведенный в трактате о несжимаемости воды, который в 1648 году опубликовал итальянский монах Рафаэлло Маджотти. Для иллюстрации несжимаемости воды он использовал ... водолаза.

